SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

MATEMATYKA DLA SZKOŁY PODSTAWOWEJ I LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCEGO

Tadeusz STYŠ

Zasanie 0.1 *Mały pastuszek zauważył lecące bociany i krzyknął chyba ich leci 100. Starszy pastuch odpowiedział dużo mniej, gdyby leciało ich dwa razy tyle, i pół tyle, i ćwierć tyle i ty żebyś z nimi poleciał to wtedy byłoby ich razem z tobą 100. Ile bocianów leciało po niebie?*

Obraz Józefa Chełmońskiego (1849-1914). Bociany

Rozwiązanie.

$$\underbrace{2 * tyle}_{8*cwierc} + \underbrace{polowa * tyle}_{+\ 2*cwierc} + \underbrace{cwierc * tyle + 1}_{+\ 1*cwierc+1} = \underbrace{100}_{=100}$$

$11 * cwierc = 99, \quad cwierc = \frac{99}{11} = 9,$

$cwierc = \frac{1}{4} * tyle$

$tyle = 4 * cwierc = \ 4 * 9 = 36.$
Odpowiedz : Ilosc bocianow rowna jest 36

Od Autora

Skrypt *"Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum Ogólnokształcącego"* został opracowany na podstawie kilkodziesięcio-letnej pracy i doświadczenia autora w różnych systemach edukacji głównie w szkołach wyższych, ale również w szkołach podstawowych i średnich w Polsce i Afryce. Zatem, tekst ten nie jest podręcznikiem dla szkoły podstawowej. Natomiast, jako materiał kompleksowy, obejmuje treść matematyki z zakresu podstawowego i rozszerzonego programu uczonego na drugim i trzecim etapie edukacji. To opracowanie całości matematyki podstawowej i licealnej może być szczególnie pomocne jako materiał do nauki indywidualnej.

Tadeusz Styś Warszawa listoped 2023r.

0.1 Wstęp

Materiał przedstawiony w skrypcie *"Matematyka dla Szkoły Podstawowej i Liceum..."* przekracza podstawę programową matematyki uczonej w szkołach podstawowych i w dużej części zawiera tematy programu matematyki uczonej w liceach i technikach. Naturalnie, ten rozszerzony zakres tematyki pozwala na wybór tematów zaawansowanych o stopniu trudności na poziomie uczniów szkoły podstawowej z większymi predyspozycjami i zainteresowaniami w przedmiotach ścisłych.

W skrypcie czytelnik znajdzie wiele interesujących algorytmów, twierdzeń z dowodami i przykładami spoza podstawowego programu matematyki na poziomie drugiego i trzeciego etapu nauczania.

Systematyczny opis liczb naturalnych, wymiernych, niewymiernych, algebraicznych i liczb rzeczywistych oraz własności operacji arytmetycznych na tych liczbach podane są w rozdziałach 1 i 2.

Wyrażenia arytmetyczne i algebraiczne jako podstawowe pojęcia związane z algorytmami i ich kodowaniem w językach programowania zostały opisane z przykładami w rozdziale 3.

Liczne przykłady obleczania procentów prostych i złożonych podane są w rozdziale 4. Rozdział 5-ty obejmuje podstawową wiedzę o ciągach i szeregach arytmetycznych i geometrycznych.

Liczby pierwsze i ich własności stanowią najważniejszą i interesującą treść rozdziału 6 . Dotyczy on głównie następujących tematów: Fundamentalne Twierdzenie Arytmetyki, Algorytm Euklidesa, największy wspólny dzielnik $NWD(a, b)$ i najmniesza wspólna wielokrotność $NWW(a, b)$ liczb naturalnych a *i* b.

Reprezentacja liczb w komputerach w zmiennym przecinku i operacje arytmetyczne na liczbach o skończonej ilości cyfr z analizą błędów bezwzględnego i względnego zostały opisane w rozdziale 7.

Cechy podzielności liczb całkowitych i operacja kongruencji dzielenia z resztątą wsparte licznymi przykładami stanowią treść rozdzialu 8.

Ogólna zasada tworzenia liczb w systemach binarnym, dziesiętnym, ósemkowym i w innych systemach liczbowych o podstawie naturalnej $\rho > 1$ opisana jest szczegółowo w rozdziale 9.

Rozdział 10-ty poswięcony jest wielomianom, najprostrzej klasie funkcji o fundamentalnym znaczeniu w matematyce i jej zastosowaniach.

Wzory uproszczonego mnożenia, dwumian Newtona i trójkąt Pascala z licznymi przykładami zostały opisane w rozdziale 11-tym.

Rozdziały 12, 13, 14, 15, *i* 16 poświęcone są funkcjom elementarnym do których należą funkcje liniowe, funkcje wymierne, funkcja pierwiastek kwadratowy, funkcje wykładnicze i logarytmiczne.

Rozdział 17-ty poświęcony jest geometrii płaskiej- planimetrii. Zakres geometrii płaskiej obejmuje konstrukcje z linijką i cyrklem figur płaskich oraz związki miarowe w trójkątach,

prostokątach, równoległobokach, w okręgach i w wielokątach foremnych.

Rozdział 18-ty , Geometria Przestrzenna- Stereometria zawiera opis następujących tematów:

1. Kartezjański układ współrzędnych.

   Punkty i wektory w przestrzeni.

2. Parametryczne równanie prostej

3. Graniastosłupy i prostopadłościany,
   objętość i pole powierzchni

4. Ostrosłupy, objętość i pole powierzchni

5. Bryły obrotowe: walec, kula, stożek,
   objętość i pole powierzchni.

Wśród brył przestrzennych wyróżniamy bryły foremne i bryły platońskie. Bryły foremne mają wszystkie ściany przystające. Bryły platońskie do których należą tylko czworościan, sześcian, ośmiościan, dunastościan i dwudziestościan, uważane były w czasach starożytnych w Akademii Platońskiej (427-343 B.C.) za figury idealne.

Rozdział 19-ty poświęcony jest trygonometrii wiedzy o związkach miarowych pomiędzy bokami i kątami w trójkątach. Istotną częścią tego rozdziału jest charakterystyka i analiza funkcji trygonometrycznych określonych w trójkącie prostokątnym i na kole trygonometrycznym.

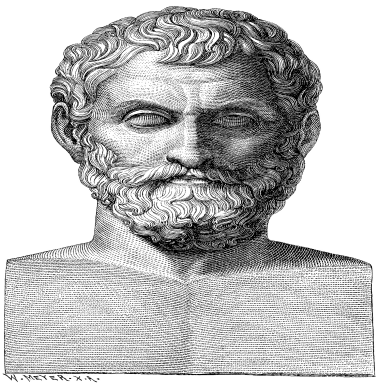
Kombinatoryka, rozdził . 20, obejmujje takie pojęcia jak sinia z liczby naturalnej n, permutacje w zbiorach n-elementowych, kombinacje i wariacje w zborach n-elementowych.

Rozdział 21-ty, statystyka opisowa, ważna w wykształceniu podstawowym, zawiera opis takich pojęć jak; dane statystyczne, diagramy, korelacje, średnie i mediany, odchylenia standardowe i wariancje.
Rachunek prawdopodobieństwa czyli probabilistyka zajmuje się badaniem praw rządzących zjawiskami losowymi (przypadkowymi), to jest takimi zjawiskami, których przebiegu czy wyniku nie można jednoznacznie przewidzieć. Zdarzenia losowe i ich prawdopodobieństwo zajścia zostały szczegółowo wyjaśnione w rozdziale 22-gim.

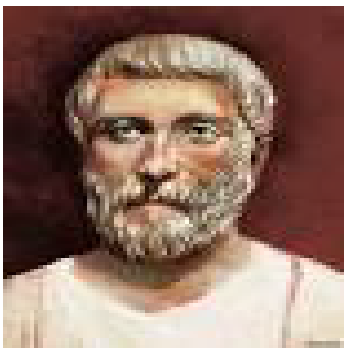
Tadeusz STYŚ Warszawa listopad 2023r.

0.2 Matematyka Grecka

Od tysięcy lat B.C. w okresie Imperium Greckiego, Starożytni Grecy asymilowali osiągnięcia wielu kultur Bliskiego Wschodu i Indii z zakresu Astronomii, Archiktektury, Medycyny, Matematyki i Fizyki. Grecy stali się najlepszymi nauczycielami pozostawiając po sobie dobrze udokumentowaną literaturę z Matematyki i nauk ścisłych. Ważną częścią ich działalności była organizacja Szkół Filozofii, Matematyki i nauk ścisłych na obszarze Grecji, Egiptu i Mezopotamii.
Tales z Miletu (625-545 B.C.)



założył pierwszą Szkołę Jońską Astronmii, Matematyki i Folozofii.
Pitagoras (569-500B.C.) z Samos



założył koedukacyjną szkołę mistyczną Filozofii i Matematyki w mieście Kroton nad morzem jońskim. Pitagoras miłośnk muzyki, stworzył podstawy wyznaczania wysokości dźwięków, autor Twierdzenia Pitagorasa o związkach miarowych w trójkącie prostokątnym i trójkach liczb pitagorejskicch a, b, c

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Euklides (330-275 B.C.) Dziekan wydziału Arytmetyki i Geometrii na Uniwersytecie w Aleksandrii (330-275 p.n.e.) przeszedł do historii jako jeden z największych matematyków starożytnych.
Autor ksiąg Elementy Arytmetyki i Geometrii. Geometria Euklidesa jest ciągle uczona w

szkołach podstawowych i średnich.

Archimedes (287-212 B.C.) syn astronoma z Syracus ogłosił znane powszechnie Prawo Archimedesa, sformułował podstawy rachunku nieskończenie małych. W wiekach średnich Newton (1642-1727) i Leibnitz (1646-1716) rozwineli ideę rachuneku niezkończenie małych. Wyniki ich badań o rachunku nieskończenie małych miały istotny wpływ na dalszy rozwój matematyki i nauk ścisłych. Mianowicie, Newton i Leibnitz stworzyli podstawy rachunku różniczkowego i całkowego.[1]

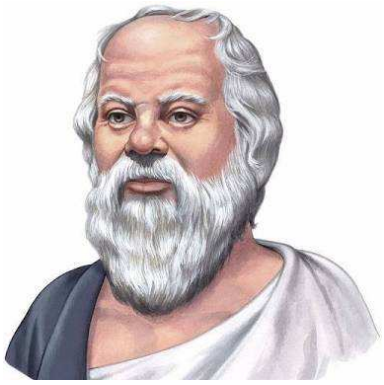
(Archimedes (287-212 B. Wielu innych greków zasłużonych weszło na stałe do historii nauki. Wśród nich Platon (429-428 B.C.) twórca filozofii idealistycznej i Arystoteles (384-322 B.C.) Uczeń Platona i nauczyciel Aleksandra Wielkiego. Platon założył słynną Akademie Platońską w Atenach. Po śmierci Platona Arystoteles

[1] Rachunek różniczkowy i całkowy, czyli Calculus, jest uczony na politechnikach i uniwersytetach jako przedmiot obowiązkowy

założył własną szkołę liceum w roku 343 B.C..

(Platon i Arystoteles)

Wymieńmy jeszcze Sokratesa (469-399 B.C.) ojca filozofii i miłośnika matematyki, który został ogłoszony nauczycielem wszechczasów.



Sokrates jest postacią historyczną. Socrates nie pozostawił po sobie żadnych pism. Wszystko, co o nim wiemy, to są relacje jego uczniów: Platona i Ksenofonta, a także przekazy Arystotelesa i historyków greckich

Contents

Chapter 1

Liczby naturalne i całkowite

1.1 Wprowadzenie

Koncepcja liczb naturalnych i proste operacje arytmetyczne były znane już od około 50 tysięcy lat temu. To wiemy na podstawie archeologicznych i historycznych odkryć.
Natomiast pierwszy systematyczny opis arytmetyki liczb naturalnych opracowany został przez starożytnych greków w szkole Jońskiej Talesa, (625-545 p.n.e.), w szkole Pitagorejskiej (569-475 p.n.e.), na uniwersytecie w Aleksandrii przez Euklidesa (330-267 p.n.e.) i przez Archmedesa z Syrakus (287-212 p.n.e.)
Teoria liczb jest w dalszym ciągu inspirującym przedmiotem licznych artykułów, monoggrafii publikowanych w wiodących pisamach poświęconych teorii liczb. W ostatnich kilkudziesięciu latach obserwuje się szerokie zastosowania teorii liczb w projektowaniu systemów komputerowych, w kryptografii i ochronie danych oraz w tworzeniu nowych algorytmów dla potrzeb administracji i programów społecznych.

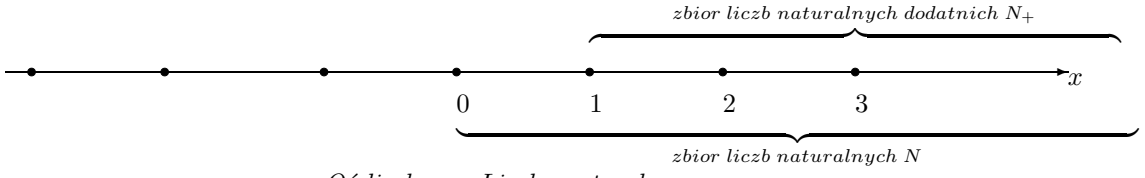
1.2 Liczby naturalne

Zbiór liczb naturalnych dodatnich (liczebniki) oznaczmy symbolem

$$N_+ = \{1, 2, 3, ..., n, ...\} \tag{1.1}$$

Umownie do zbioru liczb naturalnych zalicza się zero. Wtedy zbiór liczb naturalnych oznaczamy symbolem

$$N = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} \tag{1.2}$$



Oś liczbowa. Liczby naturalne

1.2.1 Własności liczb naturalnych

Oczywiste własności zbiorów N_+ i N.

Zbiór liczb naturalnych N_+ zawarty jest w zbiorze liczb naturalnych N, piszemy $N_+ \subset N$.
Suma liczb naturalnych $m+n$ też jest liczbą naturalną. Zatem dla dowolnych liczb naturalnych $m, n \in N$ ich suma należy do zbioru liczb naturalnych, piszemy

$$m+n \in N$$

To znaczy że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na operacje dodawania.
Na przykład dla liczb $m=5,\ n=7$ ich suma

$$m+n = 5+7 = 12 \in N$$

12 jest liczbą naturalną.
Operacja dodawania jest przemienna, to znaczy, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n suma

$$m+n = n+m$$

Na przykład

$$7+5 = 5+7 = 12 \in N.$$

Podobnie zbiór liczb naturalnych jest zamknięty na operacje mnożenia oraz operacja mnożenia jest przemienna
Mianowicie, iloczyn liczb naturalnych $m*n$ jest liczbą naturalną.
Zatem dla dowolnych liczb naturalnych $m, n \in N$ ich iloczyn

$$m*n \in N$$

należy do zbioru liczb naturalnych.
To znaczy, że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na operacje mnożenia.
Na przykład dla liczb naturalnych $m=5,\ n=7$ ich iloczyn

$$m*n = 5*7 = 35 \in N$$

jest liczbą naturalną. Operacja mnożenia jest przemienna dla dowolnych liczb naturalnych m, n iloczyn

$$m*n = n*m$$

Natomiast, wynik odejmowania liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną.
Na przykład, różnica liczb $3-5=-2$ nie jest liczbą naturalną, ale -2 jest liczbą całkowitą.
Liczby całkowite omówimy w następnym paragrafie.

1.2.2 Przykłady

Przykład 1.1 *Oblicz sumę kolejnych* 10 *liczb naturalnych*

$$S_{10} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{rcl} S_{10} & = & 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \\ S_{10} & = & 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 \\ --- & \ldots & ---------- \\ 2*S_{10} & = & \underbrace{11+11+11+11+11+11+11+11+11+11}_{10\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{10} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{10} = 10 * 11 : 2 = 55$$

Przykład 1.2 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb naturalnych*

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami, jak niżej:

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ S_n & = & n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ --- & \ldots & ---------- \\ 2 * S_n & = & \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_n.

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{10}

$$S_{10} = \frac{10 * 11}{2} = 55$$

1.3 Liczby całkowite

Jak wiemy w zbiorze liczb naturalnych operacja odejmowania nie zawsze jest wykonalna. Na przykład nie ma liczby naturalnej, która byłaby wynikiem odejmowania liczby 9 od liczby 5, gdyż różnica

$$5 - 9 = -4$$

-4 nie jest liczbą naturalną.

1.3.1 Liczby przeciwne

Liczbami przeciwnymi nazywamy dwie liczby leżące na osi liczbowej w tej samej odległości od zera, ale po przeciwnych stronach zera.
Liczby przeciwne mają tą własność, że ich suma równa jest 0.
Zatem liczba $-m$ jest przeciwna do liczby m wtedy

$$-m + m = 0$$

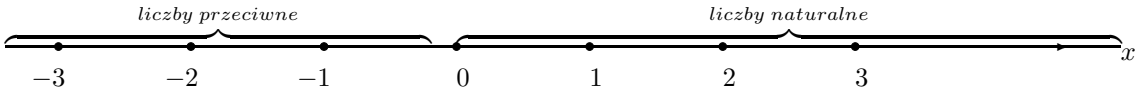
Na przykład

$$dla\ m = 7,\ \ liczba\ przeciwna\ -m = -7, \quad wtedy\ \ 7 + (-7) = 0$$

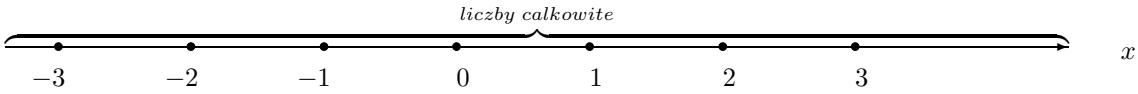
Podobnie

$$dla\ m = -9,\ \ liczba\ przeciwna\ -m = 9, \quad wtedy\ \ -9 + 9 = 0.$$

Na osi liczbowej mamy zaznaczone liczby naturalne po prawej stronie zera, a po lewej stronie zera mamy zanaczone liczby przeciwne do liczb naturalnych.



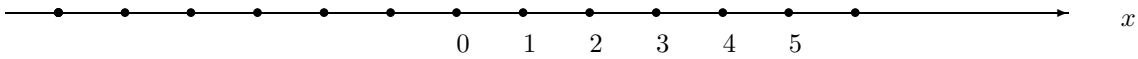
Niżej na osi liczbowej zaznacze są liczby całkowite



Wszystkie liczby naturalne razem ze wszystkimi liczbami do nich przeciwnymi tworzą zbiór liczb całkowitych
Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą C, piszemy

$$C = \{..... - 5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.....\}$$

Przykład 1.1 *Zaznacz na osi liczbowej liczby przeciwne do wskazanych liczb naturalnych*



Oś liczbowa, liczby całkowite

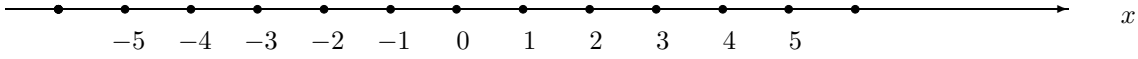
Niżej na osi liczbowej widzimy liczby naturalne

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

i liczby przeciwne do liczb naturalnych

$$0, -1, -2, -3, -4, -5$$

.



Oś liczbowa, liczby całkowite

1.3.2 Proste przykłady

Przykład 1.3 *Różnica pomiędzy zerem i kolejnymimi liczbami naturalnymi*

$$\begin{aligned} 0-1 &= -1, & 0-6 &= -6 \\ 0-2 &= -2, & 0-7 &= -7 \\ 0-3 &= -3, & 0-8 &= -8 \\ 0-4 &= -4, & 0-9 &= -9 \\ 0-5 &= -5, & 0-10 &= -10 \end{aligned}$$

Zadanie 1.1 *Wykonaj odejmowanie*

$$0-11= \quad , \quad 0-16=$$
$$0-12= \quad , \quad 0-17=$$
$$0-13= \quad , \quad 0-18=$$
$$0-14= \quad , \quad 0-19=$$
$$0-15= \quad , \quad 0-20=$$

Przykład 1.4 *Sprawdź odejmowanie*

$$5-10 = -5 \ , \ 10-16 = -6$$
$$6-12 = -6 \ , \ 11-17 = -6$$
$$7-13 = -6 \ , \ 12-18 = -6$$
$$8-14 = -6 \ , \ 13-19 = -6$$
$$9-15 = -6 \ , \ 14-20 = -6$$

Zadanie 1.2 *Wykonaj odejmowanie*

$$1-10= \quad , \quad 10-20=$$
$$3-12= \quad , \quad 11-21=$$
$$5-14= \quad , \quad 12-22=$$
$$7-15= \quad , \quad 13-23=$$
$$9-16= \quad , \quad 14-24=$$

1.4 Dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych

Zbiór liczb całkowitych

$$C = \{.....-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.....\}$$

jest zamknięty za względu na operacje dodawania i odejmowania. To znaczy, że dla dowolnych dwóch leczb całkowitych $m, n \in C$ suma

$$m+n \in C$$

i różnica

$$m-n \in C$$

tych liczb jest liczbą całkowitą.

1.4.1 Przykłady

Rozpatrzmy kilka przykładów dodawania i odejmowania liczb całkowitych.
Dodając do liczby całkowitej m liczbę całkowitą ujemną n, odejmujemy od liczby m liczbę przeciwną $-n$

Przykład 1.5

$$\begin{aligned}
5+(-4) &= 5-4 = 1, \quad dla \quad m=5, \quad n=-4,\\
-5+(-4) &= -5-4 = -9, \quad dla \quad m=-5, \quad n=-4,\\
8-(-7) &= 8+7 = 15, \quad dla \quad m=8, \quad n=-2,\\
-8-(-7) &= -8+7 = -1, \quad dla \quad m=-8 \quad n=-7.
\end{aligned}$$

1.5 Mnożenie liczb całkowitych

Zbiór liczb całkowitych

$$C = \{.....-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.....\}$$

jest zamknięty za względu na operację mnożenia. To znaczy, że dla dowolnych dwóch leczb całkowitych $m, n \in C$ iloczyn

$$m * n \in C$$

tych liczb jest liczbą całkowitą.

Iloczyn $m * n > 0$ liczb całkowitych $m, n \in C$ jest liczbą całkowitą dodatnią, jeżeli liczby $m > 0,\ n > 0$ są dodatnie lub liczby $m < 0,\ n < 0$ są ujemnne, w przeciwnym przypadku, iloczyn $m * n < 0$ liczb $m > 0,\ n < 0$ lub $m < 0,\ n > 0$ jest ujemny.

Przykład 1.2

$$\begin{aligned}
4 * 8 &= 32, \quad dla \quad m = 4 > 0, \quad n = 8 > 0,\\
(-6) * (-7) &= 42, \quad dla \quad m = -6 < 0,\ n = -7 < 0.
\end{aligned}$$

Zadanie 1.3 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\begin{aligned}
&(i) \quad (-9) * (-9) + (-6) * (-6)\\
&(ii) \quad 20 * (-1) - 14 * (-2)\\
&(iii) \quad (-3) * 4 - (12 * (-2) - (-5)
\end{aligned}$$

1.6 Dzielenie liczb całkowitych

Zauważmy, że wynik dzielenia liczb całkowitych nie zawsze jest liczbą całkowitą.
Na przykład

$$9 : 2 = 4\frac{1}{2}, \quad ale \quad 9 : 3 = 3$$

Zatem zbiór liczb całkowitycha nie jest zamknięty ze względu na operację dzielenia.

Iloraz $m : n > 0$ liczb całkowitych m i $n \neq 0$ jest liczbą dodatnią, jeżeli obie liczby są dodatnie lub obie liczby są ujemnne, w przeciwnym przypadku, jeżeli $m > 0, n < 0$ lub $m < 0, n > 0$ to iloraz $m : n < 0$ jest ujemny.

Przykład 1.3 *Wynik dzielenia dwóch liczb dodatnich jest liczbą dodatnią. Mianowicie niech* $m = 8$ *i* $n = 4$

$$m : n = 8 : 4 \quad = \quad 2,$$

Przykład 1.4 *Wynik dzielenia dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią. Niech* $m = -8$ *i* $n = -4$¿ *Wtedy*

$$m : n = (-8) : (-4) \quad = \quad 2,$$

Podobnie wynik dzielenia liczby dodatniej przez liczbę ujemną jest liczbą ujemną. Wynik dzielenia liczby ujemnej przez liczbę dodatnią jest liczbą ujemną.

Przykład 1.5

$$\begin{array}{lcll} (-8) : 4 & = & -2, & dla \quad m = -8, \quad n = 4 \\ 8 : (-4) & = & -2, & dla \quad m = 8, \quad n = -4 \end{array}$$

Zadanie 1.4 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

(i) $\quad (-8 : 4 + 14 : 7) - (9 : 3 - 6 : 2)$

(ii) $\quad (-18) : 3 + 12 : 3 - (15 : (-5) - (16 : 2))$

(iii) $\quad ((-24) : 6 + 12 : 3) - (15 : (-5) - (16 : 2))$

1.7 Liczby parzyste i nieparzyste

Zbiór liczb naturalnych składa się z dwóch podzbiorów rozłącznych. Mianowicie z podzbioru liczb parzystych i podzbioru liczb nieparzystych.
Liczby parzyste piszemy w ogólnej formie jak niżej

$$n = 2k \quad \text{dla} \;\; k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Mamy więc ciąg nieskończony liczb parzystych

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...;$$

Liczby nieparzyste. Podobnie, liczby nieparzyste piszemy

$$n = 2k + 1, \quad \text{dla} \;\; k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Zatem mamy ciąg nieskończony liczb nieparzystych

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...;$$

Zauważamy, że liczby parzyste dzielą się przez 2, natomiast liczby nieparzyste dzielą się przez 2 z resztą 1.

1.7.1 Przykłady

Przykład 1.6 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 84. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby parzyste to

$$2n-2, \quad 2n, \quad 2n+2,$$

Ich suma

$$(2n-2)+2n+(2n+2)=6n=84$$

Obliczamy n:

$$6n=84, \quad n=84:6=14$$

Obliczmy trzy kolejne liczby parzyste

$$\begin{aligned} &2n-2=2*14-2=26,\\ &2n=2*14=28,\\ &2n+2=2*14+2=30 \end{aligned}$$

Sprawdzenie: Obliczamy sumę trzech kolejnych liczb parzystych

$$26+28+30=84.$$

Przykład 1.7 *Ile różnych liczb nieparzstych dwucyfrowych można utworzyć z cyfr* $1,2,3.$*?*

Rozwiązanie:
Liczby nieparzyste utworzone z cyfr $1,2,3$ mają dwie cyfry jedności 1 lub 3
Wszystkie liczby nieparzyste dwucyfrowe i różne, które mają cyfrę jedności 1 lub 3, piszemy w tabbeli

11	21	31
13	23	33

Odpowiedź: Ilość różnych liczb dwucyfrowych nieparzystych utworzonych z cyfr $1,2,3$ równa jest ilości liczb w tabeli, to jest 6.

Przykład 1.8 *Ile różnych liczb nieparzstych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr* $1,2,3.$*?*

Rozwiązanie:
Liczby nieparzyste utworzone z cyfr $1,2,3$ mają dwie cyfry jedności 1 lub 3
Wszystkie liczby nieparzyste trzycyfrowe i różne, które mają cyfrę jedności 1 lub 3, piszemy w tabbeli

111	211	311
113	213	313
121	221	321
123	223	323
131	231	331
133	233	333

Odpowiedź: Ilość różnych liczb nieparzystych trzycyfrowych utworzonych z cyfr $1,2,3$ równa jest ilości liczb w tabeli, to jest $6*3=18$.

Przykład 1.9 *Ile różnych liczb parzystych dwucyfrowych można utworzyć z cyfr* $1,2,3,4,5,6,7$*?*

Rozwiązanie:
Liczby parzyste utworzone z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ mają trzy cyfry jedności
2 lub 4 lub 6
Napiszmy wszystkie różne liczby parzyste dwucyfrowe, które mają cyfrę jedności 2 lub 4 lub 6

12	14	16
22	24	26
32	34	36
42	44	46
52	54	56
62	64	66
72	74	76

Odpowiedź: Ilość różnych liczb parzystych dwucyfrowych utworzonych z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ równa jest ilości liczb w tabeli, to jest $3 * 7 = 21$.

Przykład 1.10 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie: Kolejne liczby nieparzyste to

$$2n + 1, \quad 2n + 3, \quad 2n + 5.$$

Ich suma

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) = 6n + 9 = 51.$$

Obliczamy n:

$$6n + 9 = 51, \quad 6n = 42, \quad n = 42 : 6 = 7.$$

Obliczmy trzy kolejne liczby nieparzyste

$$\begin{aligned} 2n + 1 &= 2 * 7 + 1 = 15, \\ 2n + 3 &= 2 * 7 + 3 = 17, \\ 2n + 5 &= 2 * 7 + 5 = 19. \end{aligned}$$

Sprawdzenie: Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych

$$15 + 17 + 19 = 51.$$

Przykład 1.11 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb parzystych*

$$S_{10} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie: Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{rcl} S_{10} & = & 2 + 4 + +6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 \\ S_{10} & = & 20 + 18 + 16 + 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 \\ - - - & \ldots & - \\ 2 * S_{10} & = & \underbrace{22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22}_{10\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{10} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{10} = 10 * 22 : 2 = 110 \quad \text{lub} \quad \mathrm{S}_{10} = \frac{10 * 22}{2} = 110$$

Przykład 1.12 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb parzystych*

$$S_n = 2 + 4 + \cdots + (2n-2) + 2n$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie: Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{cccccccc} S_n & = & 2+ & 4+ & 6+ & \cdots+ & 2n-2+ & 2n \\ S_n & = & 2n+ & (2n-2)+ & (2n-4)+ & \cdots+ & 4+ & 2 \\ --- & ... & --- & --- & --- & \cdots & --- & --- \\ 2*S_n & = & (2n+2)+ & (2n+2)+ & (2n+2)+ & \cdots+ & (2n+2)+ & (2n+2) \end{array}$$

$$\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{n\ skladnikow\ sumy}$$

Skąd obliczmy sumę S_n.

$$S_n = \frac{n(2n+2)}{2} = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{10}

$$S_{10} = \frac{10*22}{2} = 10*11 = 110$$

Przykład 1.13 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb nieparzystych*

$$S_{10} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie: Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_{10} & = & 1\ \ +3+5+7+9+11+13+15+17+19 \\ S_{10} & = & 19+17+15+13+11+9+7+5+3+1 \\ --- & ... & ----------------- \\ 2*S_{10} & = & \underbrace{20+20+20+20+20+20+20+20+20+20}_{10\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{10} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{10} = 10*20:2 = 100 \quad \text{lub} \quad \mathrm{S}_{19} = \frac{10*20}{2} = 100$$

Przykład 1.14 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb nieparzystych*

$$S_n = 1 + 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie: Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości

$$\begin{array}{cccccccc} S_n & = & 1+ & 3+ & 5+ & \cdots+ & (2n-3)+ & (2n-1) \\ S_n & = & (2n-1)+ & (2n-3)+ & (2n-5)+ & \cdots+ & 3+ & 1 \\ --- & ... & --- & --- & --- & \cdots & --- & --- \\ 2*S_n & = & 2n+ & 2n+ & 2n+ & \cdots+ & 2n+ & 2n \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_n.

$$2S_n = n * 2n, \qquad S_n = \frac{n * 2n}{2} = n * n = n^2$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{10}

$$S_{10} = 10 * 10 = 100$$

Przykład 1.15 *Udowodnij, że wyrażenie algebraiczne*

$$a^2 + (a+2)(a+2) + (a+4)(a+4) + 1$$

jest podzielne przez 12 *dla każdej liczby nieparzystej* a.

Rozwiązanie:
Ponieważ liczba a jest nieparzysta to dla pewnego n

$$a = 2 * n - 1$$

gdyż dla każdej liczby nieparzystej jest naturalne n, takie że

$$a = 2 * n - 1$$

Podstawiając do tego wyrażenia algebraicznego

$$a = 2 * n - 1$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}
& a^2 + (a+2)(a+2) + (a+4)(a+4) + 1 = \\
= \;& (2*n-1)(2*n-1) + (2*n-1+2)(2*n-1+2) + \\
+ \;& 2*n-1+4)(2*n-1+4) + 1 = \\
= \;& (4*n*n-4*n+1) + (2*n+1(2*n+1) + \\
+ \;& (2*n+3)(2*n+3) + 1 = \\
= \;& (4*n^2-4*n+1) + (4*n^2+4*n+1) + (4*n^2+12*n+9) = \\
= \;& 12*n^2+12*n+12 = \\
= \;& 12*(n^2+n+1)
\end{aligned}$$

Dla każdej nieparzystej liczby $a = 2 * n - 1$ to wyrażenie rozkłada się na czynniki 12 razy (n^2+n+1). Zatem to wyrażenie algebraiczne jest podzielne przez 12 dla każdej nieparzystej wartości parametru a.

1.7.2 Zadania

Zadanie 1.5 *Ile różnych liczb parzstych dwucyfrowych można utworzyć z cyfr* $1, 2, 3.$*?*

Zadanie 1.6 *Ile różnych liczb parzstych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr* $1, 2, 3.$*?*

Zadanie 1.7 *Ile różnych liczb nieparzystych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$*?*

Zadanie 1.8 *Oblicz sumę kolejnych* 15 *liczb naturalnych*

$$S_{15} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Zadanie 1.9 *Oblicz sumę* $9-ciu$ *kolejnych liczb naturalnych rozpoczynając od liczby* 10

$$S_9 = 10 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19$$

stosując wzór na sumę n kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 1.10 *Suma trzech kolejnych liczb naturalnych równa jest 45. Znajdź te liczby.*

Zadanie 1.11 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 120. Znajdź te liczby.*

Zadanie 1.12 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 180. Znajdź te liczby.*

Zadanie 1.13 *Wykaż, że wartość wyrażenia algebraicznego*

$$n^2 + n + 1$$

jest liczbą nieparzystą dla każdego naturalnego $n = 0, 1, 2, 3, ...$;

1.8 Operacja potęgowania

Mnożąc liczbę przez siebie kilka razy obliczamy jej potęgę.
Na przykład, mnożąc liczbę 2 otrzymamy jej kolejne potęgi

$$\begin{array}{ll} 2^0 & = 1 \\ 2^1 & = 2 \\ 2*2 & = 2^2 = 4 \\ 2*2*2 & = 2^3 = 8 \\ 2*2*2*2 & = 2^4 = 16 \end{array}$$

Podobnie, mnożąc liczb 3 przez siebie otrzymamy kolejne jej potęgi

$$\begin{array}{ll} 3^0 & = 1 \\ 3^1 & = 3 \\ 3*3 & = 3^2 = 9 \\ 3*3*3 & = 3^3 = 27 \\ 3*3*3*3 & = 3^4 = 81 \\ 3*3*3*3*3 & = 3^5 = 243 \end{array}$$

Każda liczba $a \neq 0$ różna od zera podniesiona do potęgi 0 równą jest 1
[1] Na przykład

$$1^0 = 1, \quad 5^0 = 1, \quad 6^0 = 1, \quad 7^0 = 1, \quad 14^0 = 1, \quad 259^0 = 1$$

Ogólnie, potęgą liczby $a \neq 0$ różnej od zera o wykładniku naturalnym n nazywamy iloczyn tej liczby pomnożonej przez siebie n razy i piszemy

$$\begin{array}{ll} a^0 = 1, & 2^0 = 1 \\ \underbrace{a*a...*a}_{n-czynnikow} = a^n, & \underbrace{2*2...*2}_{n-czynnikow} = 2^n \end{array}$$

Wtedy a nazywamy podstawą i n wykładnikiem potęgi a^n.

[1] Symbol 0^0 jest nieokreślony, nie ma sensu liczbowego

Zadanie 1.14 *Oblicz potęgi*

$$\begin{array}{llllllllll} 4^0 & = & , & 4^1 & = & , 4^2 & = \\ 5^2 & = & , & 5^3 & = & , 5^4 & = \\ 10^2 & = & , & 10^3 & = & , 10^4 & = \end{array}$$

Operacje arytmetyczne na potęgach. Na potęgach następujące operacje są wykonalne:

1. Mnożenie potęg o tych samych podstawach

   $$a^p * a^q = a^{p+q}$$

   dla dowolnych p, q.
   Na przykład dla $a = 2,\ p = 3,\ q = 5$ mamy

   $$2^3 * 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$$

2. Dzielenie potęg o tych samych podstawach

   $$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q},$$

   dla dowolnych liczb p, q.
   Na przykład dla $a = 2,\ p = 5,\ q = 3$ mamy

   $$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

3. Potęgowanie potęg o tych samych podstawach

   $$(a^p)^q = a^{p*q},$$

   dla dowolnych p, q.
   Na przykład dla $a = 2,\ p = 2,\ q = 3$ mamy

   $$(2^3)^2 = 2^{2*3} = 2^6 = 64$$

4. Potęga iloczynu liczb o tym samym wykładniku

   $$(a * b)^n = a^n * b^n$$

   równa jest iloczynowi potęg.
   Na przykład dla $a = 2,\ b = 3,\ n = 3$ mamy

   $$(2 * 3)^3 = 2^3 * 3^3 = 8 * 27 = 216$$

5. Potęga ilorazu liczb o tym samym wykładniku

   $$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$$

   równa jest ilorazowi potęg.
   Na przykład dla $a = 4,\ b = 2,\ n = 3$ mamy

   $$(4 : 2)^3 = 4^3 : 2^3 = 64 : 8 = 8 \quad \text{lub} \quad (\frac{4}{2})^3 = \frac{4^3}{2^3} = \frac{64}{8} = 8$$

Przykład 1.16 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{2^3 * 3^4}{2^2 * 3^3}$$

Rozwiązanie. Wykonując działania na potęgach obliczmy

$$\frac{2^3 * 3^4}{2^2 * 3^3} \quad = \quad 2 * 3 = 6$$

Zadanie 1.15 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$(i) \quad 5^2 * 2^3 + 3^2 * 2^3 - 4^2 * 5^2$$

$$(ii) \quad \frac{2^3 * 3^2 + 5^2 * 7^2 - 2 * 6 * 8 - 1}{3^2 * 5^2 - 2^3 * 4^2 + 3}$$

Odp (ii) *:12*

Zadanie 1.16 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{3^3 * 2^3 - 3^2 * 2^2}{3 * 2^3 + 2 * 3}$$

Odp:6

1.9 Liczby podzielne przez $2, 3, 4$ i 5

- Liczby podzielne przez 2

  $$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ...;$$

  piszemy w postaci ogólnej

  $$n = 2k, \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

  Przykład 1.6

  $$124 : 2 = 62, \quad \text{lub} \quad \frac{124}{2} = 62$$

  $$316 : 2 = 158, \quad \text{lub} \quad \frac{2528}{2} = 1264$$

- Liczby podzielne przez 3

  $$0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...;$$

  piszemy w postaci ogólnej

  $$n = 3k, \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

  Jasne, że liczby postaci $3 * k, \;\; k = 0, 1, 2, 3, ...;$ są podzielne przez 3, gdyż

  $$3 * k : 3 = k, \quad \text{lub} \qquad \frac{3 * k}{3} = k$$

  dla każdego naturalnego $k = 0, 1, 2, 3, 4, ...;$

  Ogólnie liczba n jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma cyfr liczby n dzieli się przez 3.

Przykład 1.7 *Liczba* $n = 54$ *jest podzielna przez 3, ponieważ jej suma cyfr* $5 + 4 = 9$ *jest podzielna przez 3.*

$$54 : 3 = 18, \quad \text{bo} \quad 3 * 18 = 54$$

Przykład 1.8 *Liczba* $n = 756$ *jest podzielna przez 3, ponieważ jej suma cyfr* $7+5+6 = 18$ *jest podzielna przez 3.*

$$756 : 3 = 252 \quad \text{bo} \quad 3 * 254 = 756$$

Test podzielności liczby $n = a_1a_0$ przez 3 ma proste uzasadnienie dla liczb dwucyfrowych. Liczba dwucyfrowa ma cyfrę dziesiątek a_1, i drugą cyfrę jedności a_0.

$$a_1a_0 = a_1 * 10 + a_0 = a_1(9 + 1) + a_0 = 9 * a_1 + a_1 + a_0$$

Pierwszy składnik $9 * a_1$ dzieli się przez 3 bo

$$9 * a_1 : 3 = 3a_1, \quad \text{lub} \qquad \frac{9 * a_1}{3} = 3a_1$$

Jeżeli drugi składnik sumy $a_1 + a_0$ dzieli się przez 3 to cała suma też dzieli się przez 3

Przykład 1.9 *Liczba* $n = 57$ *ma cyfrę dziesiątek 5 i cyfrę jedności 7. Zatem suma cyfr* $5 + 7 = 12$ *dzieli sę przez* 3 *i liczba* 57 *też dzieli się przez* 3.
Rzeczywiście mamy

$$57 = 5 * 10 + 7 = 5 * (9 + 1) + 7 = 5 * 9 + 5 + 7,$$

$$(5 * 9 + 5 + 7) : 3 = 5 * 9 : 3 + 12 : 3 = 5 * 3 + 4 = 19$$

- Liczby podzielne przez 4

  $$0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, ...;$$

  piszemy w postaci ogólnej

  $$n = 4k, \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

  Jasne, że liczby postaci $4 * k$, $k = 0, 1, 2, 3, ...;$ są podzielne przez 4, gdyż

  $$4 * k : 4 = k, \quad \text{lub} \qquad \frac{4 * k}{4} = k$$

  dla każdego naturalnego $k = 0, 1, 2, 3, 4, ...;$

- Liczby podzielne przez 5.

  $$0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...;$$

  piszemy w postaci ogólnej

  $$n = 5k, \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

  Jasne że liczby postaci $5 * k$, $k = 0, 1, 2, 3, ...;$ są podzielne przez 5, ponieważ

  $$5 * k : 5 = k, \quad \text{lub} \qquad \frac{5 * k}{5} = k$$

dla każdego naturalnego $k = 0, 1, 2, 3, 4, ...$;

Podzielność liczby n przez 5 poznajemy używając testu:

Liczba n jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej cyfra jedności jest 0 lub 5.

Przykład 1.17 *Liczba* $n = 50$ *jest podzielna przez 5, ponieważ jej cyfra jedności jest równa 0.*

$$50 : 5 = 10, \quad \text{bo} \quad 5 * 10 = 50$$

Przykład 1.18 *Liczba* $n = 265$ *jest podzielna przez 5, ponieważ jej cyfra jedności jest równa 5.*

$$265 : 5 = 53, \quad \text{bo} \quad 5 * 53 = 265$$

1.10 Dzielenie liczb przez liczby jednocyfrowe z resztą

Liczby naturalne, które spełniają testy podzielności przez liczby 2 lub 3 lub 5, dzielą się z resztą 0. Wtedy mówimy, że są podzielne przez 2 lub 3 lub 5. Jednak, jest dużo liczb, które nie spełniają testów podzielności, wtedy dzielenie wykonujemy z resztą.

1.11 Dzielenie z resztą

Rozpatrzmy następujące przykłady

Przykład 1.10 *Podziel liczbę* 13 *przez* 3

$$\frac{13}{3} = \frac{\overbrace{3 * 4 + 1}^{13}}{3} = 4 + \frac{1}{3}$$

Liczba 13 *dzielona przez 3 równa się 4 z resztą* 1.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rl} 4 & \\ -- & \\ 13 & : 3 \\ -12 & \\ -- & \\ 1 & \end{array}$$

Odpowiedź: 13 podzielić przez 3 równa się 4 z resztą 1
Wynik dzielenia piszemy w postaci:

$$13 = 4 * 3 + 1$$

Przykład 1.11 *Podziel liczbę* 53 *przez* 8

$$\frac{53}{8} = \frac{\overbrace{6 * 8 + 5}^{53}}{8} = 6 + \frac{5}{8}$$

Liczba 53 *dzieli się przez* 8 *z resztą* 5.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{r} 6 \\ -- \\ 53 \quad :8 \\ -48 \\ -- \\ 5 \end{array}$$

Odpowiedź: 53 podzielić przez 8 równa się 6 z resztą 5
Wynik dzielenia piszemy w postaci:

$$53 = 6 * 8 + 5$$

Przykład 1.12 *Podziel liczbę* 85 *przez* 9

$$\frac{85}{9} = \frac{\overbrace{9 * 9 + 4}^{85}}{9} = 6 + \frac{4}{9}$$

Liczba 85 *dzieli się przez* 9 *z resztą* 4.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{r} 9 \\ -- \\ 85 \quad :9 \\ -81 \\ -- \\ 4 \end{array}$$

Odpowiedź: 85 podzielić przez 9 równa się 9 z resztą 4
Wynik dzielenia piszemy w postaci:

$$85 = 9 * 9 + 4$$

Ogólnie piszemy, że liczba n dzieli się przez liczbę d z resztą r według wzoru

Przykład 1.13 *Dzielimy liczbę* n *przez* d

$$\frac{n}{d} = \frac{\overbrace{k * d + r}^{n}}{d} = k + \frac{r}{d}$$

Liczba n *dzieli się przez* d *z resztą* r.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{r} k \\ -- \\ n \quad :d \\ -k * d \\ -- \\ r \end{array}$$

Odpowiedź: n *podzielić przez* d *równa się* k *z resztą* r
Wynik dzielenia pisujemy w postaci:

$$n = k * d + r$$

1.12 Dzielenie liczb przez liczby dwucyfrowe z resztą

Przykład 1.14 *Podziel liczbę* 78 *przez* 42

$$\frac{78}{42} = \frac{\overbrace{42+36}^{78}}{42} = 1 + \frac{36}{42}$$

Liczba 78 *dzieli się przez* 42 *z resztą* 36.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{r} 1 \\ -- \\ 78 \\ -42 \\ -- \\ 36 \end{array} \quad : 42$$

Odpowiedź: 78 podzielić przez 42 równa się 1 z resztą 36
Wynik dzielenia piszemy w postaci:

$$78 = 1 * 42 + 36$$

Przykład 1.15 *Podziel liczbę* 1190 *przez* 25

$$\frac{1190}{25} = \frac{\overbrace{47*25+15}^{1190}}{25} = 47 + \frac{15}{25}$$

Liczba 1190 *dzieli się przez* 25 *z resztą* 15.
Teraz dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rll} 47 & & \\ -- & & \\ 1190 & : 25 & 25\ miesci\ sie\ w\ 119\ \ cztery\ razy,\ piszemy\ nad\ kreska\ 4 \\ -100 & & 4 * 25 = 100; odejmujemy\ 100 \\ -- & & \\ 190 & & roznica\ 19\ dopisujemy\ nastepna\ cyfre\ 0, \\ -175 & & 25\ miesci\ sie\ w\ 190\ \ siedem\ \ razy\ piszemy\ nad\ kreska\ 7 \\ -- & & 7 * 25 = 175; odejmujemy\ 175 \\ 15 & & reszta\ 15 \end{array}$$

Odpowiedź: 1190 podzielić przez 25 równa się 47 z resztą 15
Wynik dzielenia piszemy w postaci:

$$1190 = 47 * 25 + 15 \quad \text{lub} \quad \frac{1190}{25} = 47 + \frac{15}{25} = 47 + \frac{3}{5}$$

Przykład 1.16 *Podziel liczbę* 1995 *przez* 17

$$\frac{1995}{17} = \frac{\overbrace{117*17+6}^{1995}}{17} = 117 + \frac{6}{17}$$

Liczba 1995 *dzieli się przez* 17 *z resztą* 6.
Teraz dzielimy według schematu

117		
−−		
1995	: 17	17 *miesci sie w* 19 *jeden raz, piszemy* 1 *nad kreska*
−17		$1 * 17 = 17$; *odejmujemy* 17
−−		
29		*roznica* 2 *dopisujemy nastepna cyfre* 9
−17		17 *miesci sie* 29 *jeden raz, piszemy drugie* 1 *nad kreska*
−−		*roznica* 12 *dopisujemy nastepna cyfre* 5
125		17 *miesci sie* 125 *siedem razy*
−119		$7 * 17 = 119$ *piszemy* 7 *nad kreska*
−−		
6		*reszta* 6

Odpowiedź: 1995 podzielić przez 17 równa się 117 z resztą 6
Wynik dzielenia piszemy w postaci:

$$1995 = 117 * 17 + 6 \quad \text{lub} \quad \frac{1995}{17} = 117 + \frac{6}{17}$$

1.12.1 Zadania

Zadanie 1.17 *Wykonaj dzielenie pisemne*

$$(i) \quad 2546 : 3, \quad (ii) \quad 5796 : 9$$

Zadanie 1.18 *Wykonaj dzielenie pisemne*

$$(i) \quad 455 : 13, \quad (ii) \quad 18011 : 31$$

Zadanie 1.19 *Wykonaj dzielenie pisemne z resztą*

$$(i) \quad 2547 : 3, \quad (ii) \quad 5766 : 9$$

Zadanie 1.20 *Udowodnij, że liczba* $\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ *jest podzielna przez* 3 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma cyfr*

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$$

jest podzielna przez 3. *Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, żeby liczba* $\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ *była podzielna przez* 9.

Zadanie 1.21 *Podaj najmniejszą liczbę naturalą większą od liczby 2018 , która ma sumę cyfr 11.*

Zadanie 1.22 *Udowodnij, że liczba czterocyfrowa* $\alpha_3\alpha_2 25$ *jest podzielna przez* 25 *dla dowolnych cyfr* α_3, α_2.

Zadanie 1.23 .

(a) Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3. Wypisz 5 kolejnych liczb podzielnych przez 3.

(b) Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3 z reszta 1. Wypisz 6 kolejnych liczb podzielnych przez 3 z reszytą 1

(c) *Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3 z resztą 2. Wypisz pierwsze 7 kolejnych liczb podzielnych przez 3 z resztą 2.*

Zadanie 1.24 *Bracia Antek, Bolek, Wacek i Staś dostali od ojca razem 400 zł na zakupy szkolne. Bolek wydał o 4zł więcej niż Antek, Wacek wydał o 3 zł mniej niż Bolek, Staś wydał tyle samo co Wacek.*
Ile każdy z nich wydał na zakupy szkolne?

Zadanie 1.25 *W gospodarstwie były krowy, owce, kury i gęsi. Owiec było 2 razy więcej niż krów, gęsi było 4 razy więcej niż owiec, kur było 6 razy więcej niż gęsi. Razem mieli 124 nogi. Ile było w gospodarstwie krów, owiec, kur i gęsi ?*

Chapter 2

Liczby wymierne i niewymierne

2.1 Ułamki zwykłe

Iloraz dwóch liczb całkowitych p i q

$$\frac{\overbrace{p}^{licznik}}{\underbrace{q}_{mianownik}}, \qquad q \neq 0$$

nazywamy ułamkiem zwykłym, gdzie liczba p jest licznikiem ułamka zwykłego, a liczba $q \neq 0$ zawsze różna od zera jest mianownikiem ułamka zwykłego.
Na przykład ułamek zwykły

$$\frac{\overbrace{5}^{licznik}}{\underbrace{8}_{mianownik}}$$

ma licznik $p = 5$ i mianownik $q = 8$.
Zauważmy, że liczniki ułamków zwykłych

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{9}$$

równe są 1. Natomiast mianowniki tych ułamków są kolejnymi liczbami $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
Natomiast niżej podane ułamki mają różne liczniki i różne mianowniki.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{9}{7}, \quad \frac{11}{8}, \quad \frac{10}{9}, \quad \frac{11}{10}, \quad \frac{12}{11}, \quad \frac{13}{12}$$

Wśród ułamków zwykłych wyróżniamy *ułamki właściwe* i *ułamki niewłaściwe.*
Ułamkami właściwymi nazywamy ułamki

$$\frac{\overbrace{p}^{licznik}}{\underbrace{q}_{mianownik}}, \qquad p < q \qquad q \neq 0$$

w których licznik p jest mniejszy od mianownika q.
Podobnie *Ułamkami niewłaściwymi* nazywamy ułamki

$$\frac{\overbrace{p}^{licznik}}{\underbrace{q}_{mianownik}}, \qquad p > q \qquad q \neq 0$$

w których licznik p jest większy od mianownika q.
Ułamki niewłaściwe piszemy również w postaci *liczb mieszanych* wyróżniając cześć całkowitą
Na przykład ułamek niewłaściwy

$$\frac{5}{2}$$

piszemy umownie w postaci liczby mieszanej $2\frac{1}{2}$, jak niżej

$$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Przykład 2.1 *Zamień ułamk niewłaściwy*

$$\frac{9}{4}$$

na liczbę mieszaną

Wyłączając całość z tego ułamka, wykonaj dzielenie

$$9 : 4 = 2 + \frac{2}{4} = 2 + \frac{1}{2}$$

Skąd ułamek niewłaściwy $\frac{9}{4}$ równy jest liczbie mieszaj $2\frac{1}{2}$, piszemy

$$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{2}$$

Przykład 2.2 *Zamień liczbę mieszaną*

$$1\frac{3}{4}$$

na ułamek niewłaściwy

Dany ułamek niewłaściwy piszemy jqko sumę całość liczby mieszanej 1 dodać ułamek $\frac{3}{4}$, jak niżej

$$1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = \overbrace{\frac{4}{4}}^{1} + \frac{3}{4} = \overbrace{\frac{4+3}{4}}^{7} = \frac{7}{4}$$

Skąd liczba mieszana $1\frac{3}{4}$ równa jest ułamkowi niewłaściwemu $\frac{7}{4}$, piszemy

$$1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

2.2 Dodawanie ułamków

Dodawanie ułamków o tych samych mianownikach. Ułamki o tych samych mianownikach dodajemy liczniki zostawiamy ten sam mianownik.

Przykład 2.3 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1+1+1}{3}=\frac{3}{3}=1$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+1+1+1}{4}=\frac{4}{4}=1$$

Przykład 2.4 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1+2+4}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1+2+3+5}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$$

Dodawanie ułamków o różnych mianownikach. Żeby dodać ułamki o różnych mianownikach należy znaleźć wspólny mienownik. Może to być najmniesza wspólna wielokrotność' mianowników.

Przykład 2.5 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$
$wspolna\ wielokrotnosc\ 2\ i\ 3\ \ rowna\ 6$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{20}{6}+\frac{15}{60}+\frac{24}{60}=\frac{20+15+24}{60}=\frac{59}{60}$$
$wspolna\ wielokrotnosc\ 3,\ 4\ i\ 5\ rowna\ \ 60$

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}=\frac{5}{20}+\frac{12}{20}=\frac{5+12}{20}=\frac{17}{20}$$
$wspolna\ wielokrotnosc\ 4\ i\ 5\ \ rowna\ 20$

Zasanie 2.1 *Zamień ułamek niewłaściwy*

$$\frac{24}{5}$$

na liczbę mieszaną

Zasanie 2.2 *Zamień liczbę mieszaną*

$$5\frac{4}{9}$$

na ułamek niewłaściwy

2.3 Odejmowanie ułamków

Odejmowanie ułamków o tych samych mianownikach. Ułamki o tych samych mianownikach odejmujemy w następujący sposób:
odejmujememy liczniki i zostawiamy ten sam mianownik

Przykład 2.6 *Odejmij ułamki*

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1-1}{2}=0$$
$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{4}{5}-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4-2-1}{5}=\frac{1}{5}$$

Przykład 2.7 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1+2+4}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1+2+3+5}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$$

Przykład 2.8 *Odejmij ułamki*

$$\frac{7}{9}-\frac{1}{9}=\frac{7-1}{9}=\frac{6}{9}$$
$$\frac{13}{20}-\frac{5}{20}+\frac{3}{20}=\frac{13-5+3}{20}=\frac{12}{20}$$
$$\frac{37}{50}-\frac{23}{50}=\frac{37-23}{50}=\frac{14}{50}$$

Odejmowanie ułamkó o różnych mianownikach. Odejmując ułamki o różnych mianownikach należy znaleźć wspólny mienownik. Może to być najmniesza wspólna wielokrotność mianowników.

Przykład 2.9 *Odejmij ułamki*

$$\frac{5}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5-3*1}{9}=\frac{2}{9}$$
$wspolna\ wielokrotnosc;\ 9\ i\ 3\ rowna\ 9$

$$\frac{33}{25}-\frac{21}{50}=\frac{2*33-21}{50}=\frac{45}{50}=\frac{9}{10}$$
$wspolna\ wielokrotnosc\ 25\ i\ 50\ rowna\ 50$

$$\frac{14}{15}-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{14-3*2+5*2}{15}=\frac{14-6+10}{15}=\frac{18}{15}$$
$wspolna\ wielokrotnosc\ 15\ 5\ i\ 3\ rowna\ 15$

$$\frac{253}{500}-\frac{126}{1000}=\frac{2*253-126}{1000}=\frac{506-126}{1000}=\frac{380}{1000}$$
$wspolna\ wielokrotnosc\ 500\ i\ 1000\ rowna\ 1000$

Zasanie 2.3 *Odejmij ułamki*

$$(a) \quad \frac{5}{9} - \frac{2}{9}$$
$$(b) \quad \frac{12}{5} - \frac{7}{5}$$

Zasanie 2.4 *Odejmij ułamki*

$$(a) \quad \frac{15}{4} - \frac{3}{8}$$
$$(b) \quad \frac{43}{6} - \frac{23}{7}$$

2.4 Mnożenie ułamków

Operacja mnożenia ułamków jest bardzo prosta.
Ułamek $\frac{p}{q},\ q \neq 0$ mnożymy przez ułamek $\frac{s}{t},\ s \neq 0$ według schematu:

licznik razy licznik, mianownik razy mianownik

$$\frac{p}{q} * \frac{s}{t} = \frac{p * s}{q * t}, \quad q \neq 0,\ \ t \neq 0$$

Przykład 2.10 *Pomnóż ułamki*

$$(a) \quad \frac{2}{3} * \frac{4}{5} = \frac{2 * 4}{3 * 5} = \frac{8}{15}$$
$$(b) \quad \frac{2}{3} * \frac{(-4)}{5} = \frac{2 * (-4)}{3 * 5} = -\frac{8}{15}$$
$$(c) \quad \frac{10}{13} * \frac{21}{25} = \frac{10 * 21}{13 * 25} = \frac{210}{273}$$

Zasanie 2.5 *Pomnóż ułamki*

$$(a) \quad \frac{5}{3} * \frac{4}{5}$$
$$(b) \quad \frac{7}{9} * \frac{3}{5}$$

2.5 Dzielenie ułamków

Operacja dzielenia ułamków jest bardzo prosta.

Ułamek $\frac{p}{q},\ q \neq 0$ dzielimy przez ułamek $\frac{s}{t},\ s \neq 0$ według schematu:

licznik razy mianownik, mianownik razy licznik

$$\frac{p}{q} : \frac{s}{t} = \frac{p * t}{q * s}, \quad q, s \neq 0,\ \ p, t \neq 0$$

Przykład 2.11 *Podziel ułamki*

$$(a) \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} * \frac{5}{4} = \frac{2*4}{3*5} = \frac{8}{15}$$
$$(b) \quad \frac{-5}{9} : \frac{1}{3} = \frac{(-5)*3}{9*3} = \frac{10}{12}$$
$$(c) \quad \frac{10}{13} : \frac{21}{25} = \frac{10*25}{13*21} = \frac{250}{273}$$

Zasanie 2.6 *Podziel ułamki*

$$(a) \quad \frac{5}{4} : \frac{4}{5}$$
$$(b) \quad -\frac{15}{3} : \frac{18}{5}$$
$$(c) \quad \frac{135}{4} : (-\frac{5}{48})$$
$$(d) \quad -\frac{48}{7} : (-\frac{16}{3})$$

Zauważmy, że do liczb wymiernych zaliczamy również wszystkie liczby całkowite

$$... - 5, -4, -3, -2-, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Ogólnie, dla liczb całkowitych p i $q \neq 0$ ułamek

$$\frac{p}{q},$$

nie jest liczbą całkowitą, jeżeli $q \neq 1$. Dla $q = 1$ ułamek jest liczbą całkowitą. Zbiór wszystkich liczb całkowitych razem ze zbiorem wszystkich możliwych ułamków tworzą zbiór liczb wymiernych.
Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą W i piszemy

$$W = \{\frac{p}{q} : \quad \text{dla calkowitych liczb } p \text{ i } q \neq 0\}$$

Łatwo sprawdzamy, że zbiór liczb wymiernych jest zamknięty ze względu na cztery operacje arytmetyczne dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez liczby różne od zera. To znaczy dla dowolnych liczb wymiernych $w_1, w_2 \in W$ wynik czterech operacji jest liczbą wymierną

$$w_1 + w_2 \in W, \quad w_1 - w_2 \in W, \quad w_1 * w_2 \in W, \quad \frac{w_1}{w_2} \in W, \ \ w_2 \neq 0.$$

Na przykład, dla

$$w_1 = -\frac{2}{3} \in W, \ w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

suma

$$w_1 + w_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2*4+3*3}{12} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} = \in W$$

jest liczbą wymierną
Dla

$$w_1 = -\frac{1}{2} \in W, \ w_2 = \frac{2}{3} \in W$$

różnica

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1*3-2*3}{6} = \frac{3-6}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \in W$$

jest liczbą wymierną
Dla

$$w_1 = \frac{2}{3} \in W,\ w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

iloczyn

$$w_1 * w_2 = \frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \frac{2*3}{3*4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \in W$$

jest liczbą wymierną
Również, dla liczb

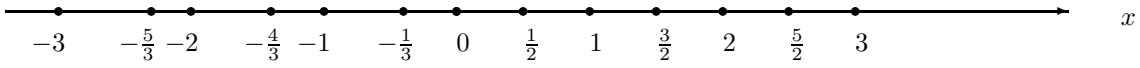
$$w_1 = \frac{2}{3} \in W,\ w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

iloraz

$$w_1 : w_2 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2*4}{3*3} = \frac{8}{9} \in W$$

jest liczbą wymierną
Zauważmy, że zbiór liczb wymiernych jest wszędzie gęsty. To znaczy pomiędzy dwoma różnymi liczbami wymiernymi w_1, w_2 istnieje "dużo" innych liczb wymiernych, na prrzykład ich średnia arytmetyczna $\frac{w_1+w_2}{2} \in W$.
Ponadto, zbiór liczb wymiernych W jest najmnieszym zbiorem liczbowym zamkniętym ze względu na cztery operacje arytmetyczne. Mianowicie, załóżmy na chwile, że liczba wymierna x nie należy do zbioru W, $(x \notin W)$. Ponieważ każda liczba wymierna ma postać $\frac{p}{q}$ dla pewnych całkowitych p i $q \neq 0$. To znaczy, że nie ma liczb wymiernych poza zbiorem W.

Liczby wymierne są reprezentowane jako punkty na osi liczbowej



Oś liczbowa. Liczby wymierne

2.6 Liczby niewymierne i liczby rzeczywiste

Dotychczas poznaliśmy zbiór liczb naturalnych N, zbiór liczb całkowitych C i zbiór liczb wymiernych W. Wiemy, że w zbiorze liczb naturalnych wykonalne są dwie operacje arytmetyczne, dodawanie i mnożenie, natomiast wynik odejmowania lub dzielenia dwóch liczb naturalnych może nie być liczbą naturalną.
Rozszerzeniem zbioru liczb naturalnych N jest zbiór liczb całkowitych C. Zatem wszystkie liczby naturalne należą do zbioru liczb całkowitych, piszemy $N \subset C$. W zbiorze C liczb całkowitych wykonalne są trzy operacje arytmetyczne dodawanie odejmowanie i mnożenie, a wynik dzielenia dwóch liczb całkowitych może nie być liczbą całkowitą.
Rozszerzeniem zbioru liczb całkowitych C jest zbiór liczb wymiernych W. Zatem wszystkie liczby całkowite należą do zbioru W liczb wymiernych, piszemy $C \subset W$. W zbiorze W liczb wymiernych wykonalne są wszystkie cztery operacje arytmetyczne dodawanie odejmowanie i mnożenie i dzielenie.
Zauważmy, że w zbiorze liczb wymiernych W nie zawsze jest wykonalna operacja odwrotna

do operacji potęgowania.
Na przykład, nie ma liczby wymiernej x, której kwadrat równy byłby 2. Inaczej równanie

$$x^2 = 2$$

nie ma rozwiązania w zbiorze liczb wymiernych.
Istotnie, gdyby istniała liczba wymierna

$$x = \frac{p}{q},\ q \neq 0,$$

o największym wspólnym dzielniku $NWD(p,q) = 1$ to ta liczba wymierna byłaby rozwiązaniem równania

$$(\frac{p}{q})^2 = 2, \qquad i \quad p^2 = 2q^2.$$

Wtedy liczba całkowita p byłaby liczbą parzystą, to znaczy $p = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej k. W tym przypadku liczba q musiałaby być również liczbą parzystą, to znaczy

$$q = 2s$$

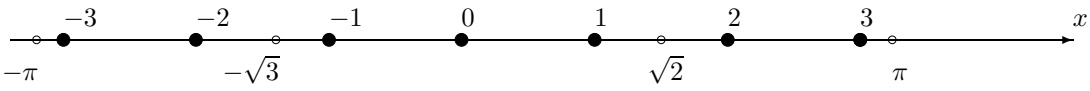
dla pewnego całkowitego s.
W konsekwencji mamy nierówność $NWD(p,q) >= 2$, która przeczy istnieniu liczby wymiernej w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, w którym największy wspólny dzielnik licznika p i mianownika q, $NWD(p,q) = 1$.
Kolejnym rozszerzeniem zbiorów liczb

$$N,\ C,\ W$$

jest zbiór liczb rzeczywistych R w którym operacja odwrotne do potęgowanie jest wykonalna.
Do zbioru liczb rzeczywistych należą wszystkie liczby wymierne i wszystkie liczby niewymierne takie jak

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{5}, \quad \sqrt[5]{7}, \quad \pi, ...;$$

$$\sqrt{x^2} = |x|,\ \textit{dlatego}\ \sqrt{4} = 2,\ \ a\ \ -2\ \textit{nie jest pierwastkiem z}\ 4$$



Oś liczbowa. Liczby rzeczywiste

Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy literą R, piszemy

$$R = \{..... - \pi, -3, -\sqrt{5}, -2, -\sqrt{2} - 1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, \sqrt[3]{9}, 3, \pi ...; \}$$

2.7 Zadania

Zadanie 2.1 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$20\frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})}{(2 - \frac{1}{3})(1 + \frac{2}{3})}$$

Zadanie 2.2 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$5[(\frac{4}{5}+\frac{7}{10})(\frac{1}{5}+\frac{1}{10})+(\frac{4}{5}-\frac{7}{10})(\frac{4}{5}+\frac{7}{10})]$$

Zadanie 2.3 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{1}{2}(\frac{2}{5}+1.5):(\frac{5}{7}-1\frac{2}{3})$$

Zadanie 2.4 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego*

$$36(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})$$

dla $a=3$ *i* $b=2$

Zadanie 2.5 *Wykonaj operacje arytmetyczne*

$$a*b, \quad a-b, \quad b:a$$

dla $a=3+\sqrt{7}, \quad b=4-2\sqrt{7}$

Zadanie 2.6 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\sqrt{67-\sqrt[3]{27}}$$

Zadanie 2.7 *Udowodnij, że liczba* $\sqrt{3}$ *jest liczbą niewymierną*

Zadanie 2.8 *Udowodnij, że liczba* $\sqrt[3]{7}$ *jest liczbą niewymierną*

Zadanie 2.9 *Znajdź wartości parametrów* a *i* b *dla których*

$$a\sqrt{b}=\sqrt{50}+\sqrt{128}+\sqrt{162}$$

Zadanie 2.10 *Dla zbiorów*

$$A=\{x: \ -\infty<x<5\} \quad \text{oraz} \quad B=\{x: \ 2<x\leq 9\}$$

Zaznacz na osi liczbowej alternatywę zbiorów $A\smile B$ *i i ich koniukcję* $A\frown B$.

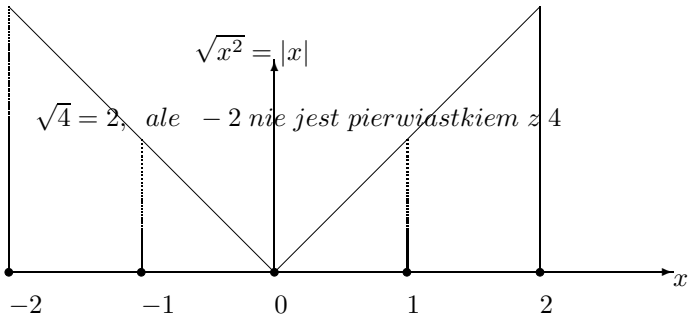
2.8 Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna liczby to odległość punktu x od początku układu oznaczonego przez 0. Zatem, wartość bezwzględna liczby x jest zawsze nieujemna.

Defimnicja 2.1 *Wartość bezwzględną liczby* x *określamy jak następuje:*

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{gdy} \quad x\geq 0, \\ -x & \text{gdy} \quad x<0 \end{cases}$$

Na przykład $|5| = 5$ bo $5 > 0$, również $|-5| = -(-5) = 5$, gdy $x = -5 < 0$.
Również wartość bezwzględną liczby x jest dana wzorem $|x| = \sqrt{x^2}$.



Wykres wartości bezwzględnej $y = |x|$

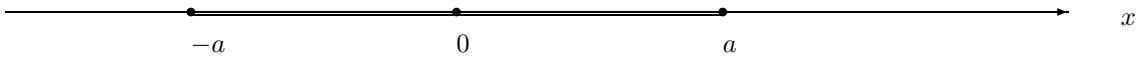
Odcinek na osi liczbowej. Z definicji wartości bezwzględnej liczby x, wynika nierówność

$$|x| \leq a, \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \qquad -a \leq x \leq a, \qquad a \geq 0.$$

Rzeczywiście, zauważamy, że

$$|x| \leq a, \qquad \text{gdy} \quad x \leq a \quad \text{i} \quad -x \leq a, \quad \text{to znaczy} \quad -a \leq x \leq a.$$

Na osi liczbowej zaznaczmy zbiór liczb x, które spełniają $-a \leq x \leq a$



Odcinek na osi liczbowej $|x| \leq a$.

Podobnie, odcinek $[a, b]$ o początku w punkcie a i końcu w punkcie b, to jest zbiór punktów x leżących pomiędzy punktami a i b piszemy jak następuje:

$$[a, b] = \{x \in R : \ a \leq x \leq b\}$$

Długość odcinka $[a, b]$, to jest odległość punktu a od punktu b, równa się wartości bezwzględnej różnicy $|b - a|$.

Przykład 2.1 *Rozwiąż równanie*

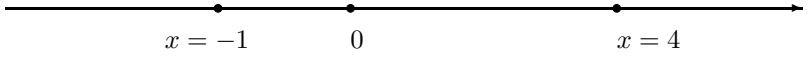
$$|2x - 3| = 5.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Rozwiązanie. Z defincji wartości bezwzględnej

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 = 5, & gdy \quad 2x-3 \geq 0, \qquad to \quad x = 4, \\ -(2x-3) = 5 & gdy \quad -2x+3 \leq 0, \quad to \quad x = -1, \end{cases}$$

Rozwiązanie x=-1 lub $x = 4$ podane jest niżej na osi liczbowej.



Rozwiązanie $x = -1$ lub $x = 4$.

Przykład 2.2 *Rozwiąż nierówność*

$$|x - 3| \leq 2.$$

Rozwiązanie. Z definicji wartości bezwzlęnej nierówność

$$|x-3| \leq 2.$$

jest równoważna z podwójną nierównością

$$-2 \leq x-3 \leq 2, \quad \text{lub} \quad 1 \leq x \leq 5.$$

Odpowiedź: $1 \leq x \leq 5$.

Przykład 2.3 *Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność*

$$|x-1|+|x+1| \leq 1.$$

Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej.

Rozwiązanie. Z definicji wartości bezwzlęnej znajdujemy

1. *dla* $x+1 \leq 0$, $|x+1| = -(x+1) = -1-x$, *i* $|x-1| = -(x-1) = -1-x$

   $|x-1|+|x+1| = 1-x-1-x = -2x \leq 1$,

   gdy $x \geq -\frac{1}{2}$, *wtedy nierownosc nie ma rozwiazania*

2. *dla* $-1 \leq x \leq 1$, $|x-1| = (x-1) = x-1$, *i* $|x+1| = -(x+1) = -1-x$

   $|x-1|+|x+1| = x-1-1-x = -2 \leq 1$,

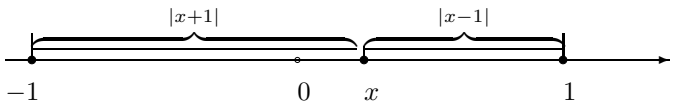
   gdy $-1 \leq x \leq 1$, *wtedy nierownosc jest prawdziwa dla* $-1 \leq x \leq 1$

3. *dla* $x-1 \geq 0$, $|x-1| = x-1$, *i* $|x+1| = x+1$

   $|x-1|+|x+1| = (x-1)+(x+1) = 2x \leq 1$,

   gdy $x \leq \frac{1}{2}$, *wtedy nierownosc nie ma rozwiazania*

Odpowiedź: Nierówność jest spełniona dla $-1 \leq x \leq 1$. To znaczy dla wszystkich x takich, że $|x| \leq 1$.
Zauważmy, że odległość każdego punktu $x \in [-1,1]$ od punktu -1 plus odległość tego punktu x od punktu 1 równa się 1. Zatem nierówność jest spełniona również dla $x=-1$ lub $x=1$, wtedy zachodzi znak równości. Zaznaczmy to rozwiązanie na rysunku.



$|x-1|+|x+1| = 1$ dla każdego $x \in [-1,1]$

2.8.1 Zadania

Zadanie 2.11 *Rozwiąż równanie*

$$|3x-5| = 4.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 2.12 *Rozwiąż równanie*

$$|2x - 3| = 5.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 2.13 *Rozwiąż nierówność*

$$|x - 5| \leq 2.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 2.14 *Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność*

$$|x| + |x - 2| \leq 2.$$

Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej

Chapter 3

Wyrażenia arytmetyczne i algebraiczne

Zacznijmy od sformułowania pojęć wyrażenia arytmetycznego i algebraicznego.

Defimnicja 3.1 *Wyrażeniem arytmetycznym nazywamy ciąg liczb połączonych czterema operacjami arytmentycznymi dodawania, odejmowania mnożenia i dzielenia przez liczby różne od zera.*

Na przykład, wyrażenie

$$\frac{3*4+6:2-2*3}{2^3+3^2-8:2}$$

jest wyrażeniem arytmetycznym składającym się z ciągu liczb

$$\begin{aligned} &\textit{Licznik}: && 3,4,6,2,2,3,\\ &\textit{mianiwnik}: && 2,3,3,2,8,2 \end{aligned}$$

połączonych operacjami arytmetycznymi

$$*,\ +,\ :,\ -,\ *,/,\ '+,\ '-,\ :$$

Podobnie definiujemy wyrażenia algebraiczne. Mianowicie

Defimnicja 3.2 *Wyrażeniem algebraicznym nazywamy ciąg liczb lub liter połączonych czterema operacjami arytmentycznymi dodawania, odejmowania mnożenia i dzielenia przez liczby lub litery, których wartości są różne od zera.*

Na przykład

$$\frac{a*4+x:2-2*3}{x^3+3^2-b:2}$$

jest wyrażeniem algebraicznym składającym się z ciągu liczb i liter

$$a,4,x,2,2,3,x,3,3,3,2,b,2$$

połączonych operacjami arytmetycznymi

$$*,\ +,\ :,\ -,\ *,/,\ '+,\ '-,\ :$$

które dla wartości $a = 3,\ x = 6,\ b = 8$ staje się wyrażeniem arytmetycznym.
Obliczając wartość wyrażenia arytmetycznego należy zachować kolejność wykonywania operacji arytmetycznych.

Najpierw wykonujemy operacje mnożenia i dzielenia, w następnej kolejności wykonujemy operacje dodawania i odejmowania.

Kolejność wykonywania operacji arytmetycznych mogą zmienić nawiasy, jeżeli w wyrażeniu nawiasy występują.[1]

3.0.2 Zadania

Zadanie 3.1 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$(a) \quad 12 + 14 + 24$$

$$(b) \quad 50 - 24 - 8$$

Zadanie 3.2 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność działań*

$$(a) \quad 18 - 16 + 2 * 8$$

$$(b) \quad 5 * 6 + 24 : 3$$

Zadanie 3.3 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$(a) \ \ 3 * (4 + 6) - 2 * (3 + 5)$$

$$(b) \ \ (50 - 40) * 2 - (10 + 6) : 2$$

Zadanie 3.4 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$5^2 * 2^3 + 3^2 * 2^3 - 4^2 * 5^2$$

Zadanie 3.5 *Oblicz wartość wyrażenia artmetycznego*

$$\frac{3^3 * 2^3 - 3^2 * 2^2}{3 * 2^3 + 2 * 3}$$

Odp:6

Zadanie 3.6 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{2}{5} * \frac{3}{5} - \frac{2}{9} * \frac{3}{8}}{\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3}}$$

Zadanie 3.7 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5}}{\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3}}$$

Zadanie 3.8 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$\frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})}{(\frac{2}{3} + \frac{3}{4})(\frac{4}{3} + \frac{5}{4})}$$

[1] Algorytmy mają postać wyrarżeń algebraicznych

Zadanie 3.9 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$\frac{(\frac{2}{5}*\frac{3}{5}-\frac{2}{9}*\frac{3}{8})(\frac{3}{5}*\frac{3}{5}-\frac{1}{5}*\frac{3}{5})}{(\frac{5}{3}*\frac{2}{5}+\frac{3}{7}*\frac{7}{3})(\frac{5}{3}*\frac{2}{5}+\frac{3}{7}*\frac{7}{3})}$$

Zadanie 3.10 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*

$$\frac{(\frac{1}{3}*\frac{2}{5}-\frac{1}{2}*\frac{3}{5})(\frac{1}{3}*\frac{2}{5}-\frac{1}{2}*\frac{3}{5})}{(\frac{2}{3}*\frac{1}{4}+\frac{3}{4}*\frac{4}{3})(\frac{2}{3}*\frac{1}{4}+\frac{3}{4}*\frac{4}{3})}$$

3.1 Wyrażenia algebraiczne

Przypominamy, że oprócz wyrażeń arytmetycznych, mamy wyrażenia algebraiczne. W wyrażeniach algebraicznych dopuszczamy litery, symbole o zmiennej warości. Zatem, wyrażeniem algebraicznym nazywamy ciąg liczb i liter połączonych operacjami arytmetycznymi dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia.

Przykład 3.1 *Uprość wyrażenie*

$$\frac{a^2-a}{a-1}-(a+1), \qquad a>1.$$

Rozwiązanie. Wykonując działania arytmetyczne, obliczmy

$$\begin{aligned}
\frac{a^2-a}{a-1}-(a+1) &= \frac{(a^2-a)-(a-1)(a+1)}{a-1} \\
&= \frac{(a^2-a)-[a(a+1)-1(a+1)]}{a-1} \\
&= \frac{a^2-a-[a^2+a-a-1]}{a-1} \\
&= \frac{a^2-a-a^2+1]}{a-1} \\
&= \frac{1-a}{a-1}=-\frac{1-a}{1-a}=-1.
\end{aligned}$$

3.1.1 Zadania

Zadanie 3.11 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $a=2$

$$\frac{\frac{a}{3}-\frac{a}{2}}{\frac{a}{3}+\frac{a}{4}}$$

Zadanie 3.12 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $b=1$

$$\frac{\frac{2}{b}*\frac{3}{b}-\frac{2}{b}*\frac{3}{b}}{\frac{b}{3}*\frac{b}{5}+\frac{b}{7}*\frac{b}{3}}$$

Zadanie 3.13 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $c=3$

$$\frac{\frac{c}{3}*\frac{c}{5}-\frac{c}{3}*\frac{3}{c}}{\frac{c}{3}*\frac{1}{c}+\frac{3}{c}*\frac{c}{3}}$$

Zadanie 3.14 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $a = 2$

$$\frac{(\frac{a}{3} - \frac{a}{2})(\frac{2}{3} - \frac{a}{2})}{(\frac{2}{3} + \frac{a}{4})(\frac{4}{a} + \frac{a}{4})}$$

Zadanie 3.15 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $b = 3$

$$\frac{(\frac{b}{5} * \frac{3}{b} - \frac{b}{9} * \frac{3}{b})(\frac{3}{b} * \frac{3}{b} - \frac{1}{b} * \frac{3}{5})}{(\frac{b}{3} * \frac{2}{b} + \frac{3}{7} * \frac{b}{3})(\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3})}$$

Zadanie 3.16 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $c = 1$

$$\frac{(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5})(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5})}{(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3})(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3})}$$

3.2 Wyrażenie algebraiczne liniowe

Wyrażenie algebraiczne

$$a * x + b$$

nazywamy liniowym ze względu na zmienną x, gdzie współczynniki wyrażenia liniowego a i b mają ustaloną wartość.

Na przykład

$$2 * x + 1, \quad gdzie\ wspolczynniki \qquad a = 2, \quad b = 1$$

$$-5 * x + 4, \quad gdzie\ wspolczynniki \qquad a = -5, \quad b = 4$$

3.2.1 Zadania

Zadanie 3.17 *Napisz wyrażenie algebraiczne liniowe o współczynnikach*

$$(i) \quad a = 5, \qquad b = -25$$

$$(ii) \quad a = \frac{3}{5}, \qquad b = \frac{2}{9}$$

$$(iii) \quad a = -\frac{13}{15}, \quad b = -\frac{15}{29}$$

3.3 Równanie liniowe

Równanie w postaci

$$a * x + b = 0$$

lub każde inne równanie, które można sprowadzić do tej postaci nazywamy równaniem liniowym ze względu na niewiadomą x. Współczynniki a i b tego równania mają wartość ustaloną.
Rozwiązaniem równania liniowego z niewiadomą x jest każda liczba, która podstawiona w miejsce x, spełnia to równanie.
Rozwiązanie równania liniowego otrzymujemy postępując według schematu:
• przenosimy liczby na prawą stronę zmieniając ich znak na przeciwny,
• niewiadomą x zostawiamy na lewej stronie

• dzielimy lub mnożymy przez współczynnik $a \neq 0$, żeby otrzymać współczynnik 1 przy zmiennej x.

Przykłady równań liniowych z rozwiązaniami.

$$2 * x - 4 = 0, \quad x = 2, \quad bo \qquad 2 * 2 - 4 = 0, \quad dla \qquad a = 2, \quad b = -4$$

$$-3 * x + 3 = 0, \quad x = 1, \quad bo \qquad -3 * 1 + 3 = 0, \quad dla \qquad a = -3, \qquad b = 3$$

Przykład 3.2 *Rozwiąż równanie liniowe*

$$2x - 1 = 0, \qquad a = 2, \;\; b = -1.$$

Rozwiązanie.
Przenosimy liczbę -1 na prawą strone, zmieniając znak na przeciwny i dzielimy obie strony tego równania przez 2

$$2x = 1 \mid : 2$$

W ten sposób znajdujemy rozwiązanie

$$x = \frac{1}{2}$$

Podstawiając do równania $x = \frac{1}{2}$, sprawdzamy, że otrzymane rozwiązanie spełnia to równanie. Mianowicie dla $x = \frac{1}{2}$, mamy

$$2x - 1 = 2\frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Widzimy, że rozwiązanie $x = \frac{1}{2}$ spełnia to równanie. Teraz podamy ogólny schemat rozwiązania równania liniowego.

$$a\, x + b = 0,$$

$$a \neq 0,$$

$$a\, x = -b,$$

$$x = -\frac{b}{a},$$

3.3.1 Zadania

Zadanie 3.18 *Rozwiąż równanie*

$$(i) \quad 3\, x - 12 = 0$$

$$(ii) \quad 5\, x + 20 = 10$$

$$(iii) \quad \frac{3}{4}x + \frac{5}{8} = 1$$

$$(iv) \quad 1,5x + 2,9 = 7$$

Zadanie 3.19 *Mały pastuszek zauważył lecące bociany i krzyknął chyba ich leci 100. Starszy pastuch odpowiedział dużo mniej, gdyby leciało ich dwa razy tyle, i pół tyle, i ćwierć tyle i ty żebyś z nimi poleciał to wtedy byłoby ich razem z tobą 100. Ile bocianów leciało po niebie?*

Obraz Józefa Chełmońskiego (1849-1914). Bociany

Zadanie 3.20 *Franek czytał książkę 25 stron dziennie. Przeczytał całą książkę w ciągu 3 dni.*
Oblicz ile stron ma ta książka ?

Zadanie 3.21 *Marysia kupiła 3 zeszyty po 7 złotych każdy. Kazik kupił piłkę za 10 złotych i zegarek za 35 złotych?*

Ile zapłaciła Marysia za 3 zeszyty ?

Ile zapłacił Kazik za piłkę i za zegarek ?

O Ile więcej złotych Kazik zapłacił za zakupy od Marysi ?

Bolek jest 2 razy starszy od Stefki, która ma 7 lat. Olek ma tyle lat co Bolek i Stefka razem.

(a) Ile lat ma Bolek ?

(b) Ile lat ma Olek ?

Zadanie 3.22 *Na kilku drzewach siedziały wrony. Janek powiedział do Ojca*
Tato dużo wron widzę na drzewach, chyba jest ich 100.
Ojciec odpowiedział Jasiu gdyby było 2 razy tyle i połowę tyle to wtedy byłoby 100 wron.

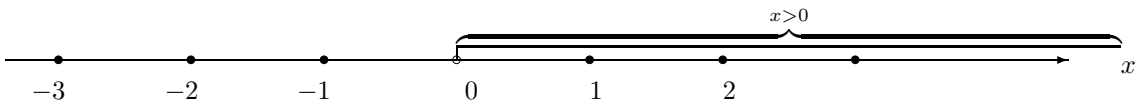
Ile wron siedziało na drzewach ?

Zadanie 3.23 *Uprość wyrażenie algebraiczne*

$$\frac{a^2-a}{a-1}-(a+1), \qquad a>1.$$

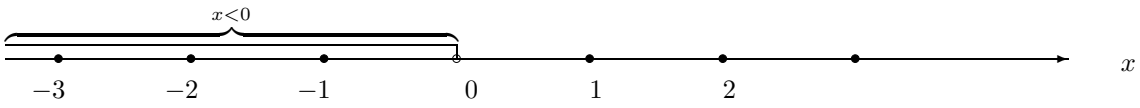
3.4 Nierówności

Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, które są większe od zera.



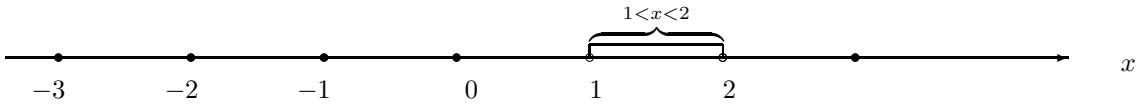
Nierówność ostra $x > 0$ wartości dodatnich zmiennej x

Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, które są mniejsze od zera.



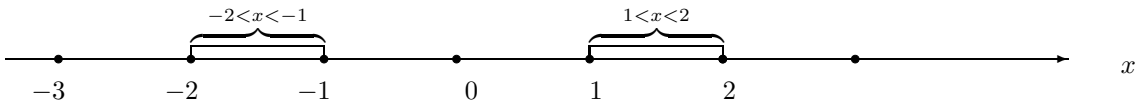
Nierówność ostra $x < 0$ wartości ujemnych zmiennej x

Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, które leżą pomiędzy liczbą 1 i liczbą 2.



Wartości zmiennej x pomiędzy 1 *i* 2

Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, które leżą pomiędzy liczbą -2 i liczbą -1 lub liczbą 1 i liczbą 2.



Wartości zmiennnej x pomiędzy -2 i -1 lub 1 i 2

gdy $-2 \leq x \leq -1$ lub $1 \leq x \leq 2$

3.4.1 Zadania

Zadanie 3.24 *Rozwiąż nierówność*

$$(i) \quad 2x - 1 > 1$$

$$(ii) \quad 4x - 6 \leq 10$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, dla których nierówności (a) i (b) są prawdziwe.

Przykład 3.1 *Rozwiąż nierówność*

$$3(x-1) < 2(x+1)$$

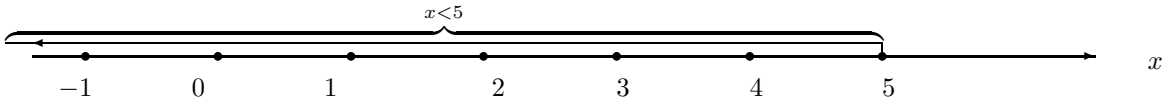
Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, dla których nierówność jest prawdziwa.
Rozwiązanie
Wykonujemy mnożenia po lewej i po prawej stronie nierówności

$$3x - 3 < 2x + 2$$

Zawsze, przenosimy zmienną x na lewą stronę nierówności ze znakiem przeciwnym, natomiast liczby przenosimy na prawą stronę nierówności też ze znakiem przeciwnym

$$3x - 2x < 2 + 3, \quad x < 5$$

Na osi liczbowej zaznaczmy rozwiązanie nierówności $x < 5$



Nierówność ostra wartości zmiennej x mniejszych od 5

Zadanie 3.25 *Rozwiąż nierówność*

$$(i) \quad 3(3x-1) - 2(2x+1) < 4(x-1)$$

$$(ii) \quad 3(x-2) + 4(x+2) \leq 2x + 10$$

$$(iii) \quad \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad dla \;\; x \neq -1$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości zmiennej x, dla których nierówności (i), (ii) i (iii) są prawdziwe.

3.5 Ułamki dziesiętne

Ułamki zwykłe o mianownikach 10,100, 1000 na zywamy ułamkami dziesiętnymi. Ułamki dziesiętne piszemy używając przecinka zamiast kreski, piszemy jak niżej

$$\frac{1}{10} = 0,1, \quad \frac{1}{100} = 0,01, \quad \frac{1}{1000} = 0,001.$$

oraz

$$\frac{3}{10} = 0,3, \quad \frac{5}{100}, = 0,05,$$

$$\frac{35}{1000} = 0,035 \quad \frac{735}{1000} = 0,735,$$

$$2\frac{3}{10} = 2,3, \quad 10\frac{12}{100} = 10,12$$

Mamy relacje odwrotne, ułamki dziesiętne zamieniamy na ułamki zwykłe

$$\begin{aligned} 0,1 &= \frac{1}{10}, & 0,01 &= \frac{1}{100}, \\ 0,001 &= \frac{1}{1000}, & 0,3 &= \frac{3}{10}, \\ 0.05 &= \frac{5}{100}, & 0,035 &= \frac{35}{1000}, \\ ]0,735 &= \frac{735}{1000}, & 2,3 &= \frac{23}{10}, \\ 10,12 &= 10\frac{12}{100}. \end{aligned}$$

Każdy ułamek zwykły możemy zamienić na ułamek dziesiętny.
Pierwszy prosty sposób zamiany ułamka zwykłego na dziesiętny polega na zapisaniu tego ułamka przy mienowniku, $10, 100, 1000, ...$ Ten sposób jest prosty tylko dla wybranych ułamków.

Przykład 3.2

$$\frac{1}{2} = \frac{1*5}{2*5} = \frac{5}{10} = 0.1$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3*25}{4*25} = \frac{75}{100} = 0.25$$

$$\frac{7}{5} = \frac{7*20}{5*20} = \frac{140}{100} = 1.4$$

$$\frac{15}{250} = \frac{15*4}{250*4} = \frac{60}{1000} = 0.06$$

Drugi sposób zamiany ułamków zwykłych na dziesiętne polega na dzieleniu licznika przez mianownik.

Przykład 3.3 *Zamień ułamek* $\frac{1}{4}$ *na ułamek dziesiętny.*
Rozwiązanie. *Dzielimy 1=1,00 przez 4. Zauważamy, że zera po przecinku nie zmieniają wartości 1*

$$\begin{array}{rl} & 0,25 \\ & -- \\ & 1,00 \quad :4 \\ - & 0 \\ & -- \\ & 10 \\ & -8 \\ & -- \\ & \;\; 20 \\ & -\;\; 2 \\ & -- \\ & \;\;\; 0 \end{array}$$

Odpowiedź: $\frac{1}{4} = 0,25$

3.5.1 Zadania

Zadanie 3.26 *Zamień ułamek zwykły na dziesiętny*

(i) $\frac{3}{5}$

(ii) $\frac{37}{50}$

(iii) $\frac{253}{250}$

Zadanie 3.27 *Zamień ułamek zwykły na dziesiętny*

(i) $\frac{2}{15}$

(ii) $\frac{23}{45}$

(iii) $\frac{37}{150}$

Chapter 4

Procenty i promile

$p\%$ procent to ułamk $\frac{p}{100}$ o liczniku p i o mianowniku 100.

Na przykład

1% jeden procent to ułamek $\frac{1}{100} = 0.01$ o liczniku 1 i o mianowniku 100.

25% to ułamek $\frac{25}{100} = 0.25$ o liczniku 25 i o mianowniku 100.

100% to całość $\frac{100}{100} = 1$ o liczniku 100 i o mianowniku 100

Obliczamy $p\%$ procent z wartości a

$$p\% \ * \ a = \frac{p}{100} * a$$

jako ułamek o liczniku p i o mianowniku 100 z a.

4.0.2 Zadania

Zadanie 4.1 *Oblicz* 15% *z wartości a=60*

$$15\% * 60 = \frac{15}{100} * 60 = \frac{15 * 60}{100} = \frac{15 * 6}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

Zadanie 4.2 *Oblicz* 25% *z wartości a=3000*

$$25\% * 3000 = \frac{25}{100} * 3000 = \frac{25 * 3000}{100} = \frac{75000}{100} = 750$$

Odwrotnie, mając $p\% * a$ procent z wartości a, obliczamy wartość a

Przykład 4.1 30% *procent wartości a równa się* 600. *Oblicz wartość a*

Rozwiązanie.

$$30\% * a = 600, \quad \frac{30}{100} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{100}} = \frac{600 * 100}{30} = 2000$$

Zadanie 4.3 *Oblicz* 75% *z wartości* $a = 2000$

Zadanie 4.4 *Oblicz* 15% *z wartości* $a = 4000$

Odwrotnie, mając $p\% * a$ procent z wartości a, oblicz wartość a podaną niżej w ćwiczeniach

Zadanie 4.5 50% *procent wartości a równa się* 800. *Oblicz wartość a*

Zadanie 4.6 30% *procent wartości a równa się* 5000. *Oblicz wartość a*

Zadanie 4.7 *Cena metra kwadratowego materiału na zasłony okien kosztowała* 50 *zł. Najpierw podwyższono cenę o* 30% *potem obniżono o* 10 % *za metr kwadratowy. Ile zapłacił klient za* 10 m^2 *materiału ?*

Zadanie 4.8 *Cena materiału razem z* 7% *VAT kosztowała* 107 *zł. Podatek VAT materiału wrósł do* 22%. *Ile kosztował materiał z całym VAT ?. O ile procent wrosła cena materiału ?*

4.1 Promile

Promile to ułamki o mianowniku 1000.
$p\%\%$ promili to ułamk $\frac{p}{1000}$ o liczniku p i o mianowniku 1000.

Na przykład

1%% jeden procent to ułamek $\frac{1}{1000} = 0.001$ o liczniku 1 i o mianowniku 1000.

25%% to ułamek $\frac{25}{1000} = 0.025$ o liczniku 25 i o mianowniku 1000.

1000%% to całość $\frac{1000}{1000} = 1$ o liczniku 1000 i o mianowniku 1000.

Ogólmoie $p\%\%$ promili z wartości a, obliczamy jak niżej

$$p\%\% \ * \ a = \frac{p}{1000} * a$$

jako ułamek o mianowniku 1000 z a.

4.1.1 Zadania

Zadanie 4.9 *Oblicz* 15%% *z wartości a=3000*

$$15\%\% * 3000 = \frac{15}{1000} * 3000 = \frac{15 * 3000}{1000} = 45$$

Zadanie 4.10 *Oblicz* 25%% *z wartości a=3000*

$$25\%\% * 3000 = \frac{25}{1000} * 3000 = \frac{25 * 3000}{1000} = 75$$

Odwrotnie, mając $p\%\% * a$ promili z wartości a, łatwo obliczamy wartość a

Przykład 4.2 $30\%\%$ *promili z wartości a równa się* 600. *Oblicz wartość a*

Rozwiązanie.

$$30\%\% * a = 600, \quad \frac{30}{1000} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{1000}} = \frac{600 * 1000}{30} = 20000$$

Zadanie 4.11 *Oblicz* $75\%\%$ *z wartości* $a = 2000$

Zadanie 4.12 *Oblicz* $15\%\%$ *z wartości* $a = 4000$

4.2 Procent składany

Wprowadźmy następujące oznaczenia

- K_0 - kapitał początkowy
- K_n - kapitał po n latach
- p - procent wzrostu kapitału lub malenia kapitału kredytu w skali roku, przy stałych ratach miesięcznych R spłacania kredytu K_0.
- n - ilość lat oszczędności

Po pierwszym roku oszczędzania kapitał K_0 wzrośnie o $p\%$

$$K_1 = K_0 + K_0\frac{p}{100} = K_0(1 + \frac{p}{100})$$

Po drugim roku oszczędności kapitał K_1 wzrośnie o $p\%$

$$K_2 = K_1 + K_1\frac{p}{100} = K_1(1 + \frac{p}{100}) = K_0(1 + \frac{p}{100})^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, po n latach oszczędzania kapitał K_{n-1} wrośnie o $p\%$. To znaczy

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1}\frac{p}{100} = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po n latach oszczędzania

$$K_n = K_0(1 + \frac{p}{100})^n \tag{4.1}$$

Przykład 4.1 *Oblicz o ile wzrośnie kapitał* $150000PLN$ *po 10 latach, jeżeli prcent* $p = 5\%$.

Rozwiązanie. Stosując wzór (4.1) dla $K_0 = 150000$, $n = 10$, $p = 5$, obliczamy

$$K_{10} = 150000(1 + \frac{5}{100})^{10} = 150000 * 1.05^{10} = 150000 * 1.62889 = 244334PLN$$

Odpowiedź: Kapitał $150000PLN$ wzrośnie przez 10 lat do sumy $244334PLN$.

Spłata kredytu. Podobnie obliczamy procent składany od kredytu K_0 przy ratach miesięcznych R, jeżeli procent kredytu jest równy $p\%$
Po pierwszym roku spłacania kapitał K_0 zmaleje o $12R$ rat plus $p\%$ z kapitału K_0.

$$K_1 = K_0 + K_0\frac{p}{100} - 12R = K_0(1+\frac{p}{100}) - 12R$$

Po drugim roku spłacania kapitał K_1 zmaleje o $12R$ rat plus $p\%$ z kapitału K_1.

$$\begin{aligned} K_2 = &= K_1(1+\frac{p}{100}) - 12R \\ &= \underbrace{(K_0(1+\frac{p}{100}) - 12R)}_{K_1}(1+\frac{p}{100}) - 12R \\ &= K_0(1+\frac{p}{100})^2 - 12R(1+\frac{p}{100}) - 12R = K_0(1+\frac{p}{100})^2 - 12R(1+(1+\frac{p}{100})) \end{aligned}$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, po n latach spłacania kapitał K_n zmaleje do sumy

$$\begin{aligned} K_n = &= K_{n-1}(1+\frac{p}{100}) - 12R \\ &= K_0(1+\frac{p}{100})^n - 12R(1+(1+\frac{p}{100}) + (1+\frac{p}{100})^2 + \cdots + (1+\frac{p}{100})^{n-1}) \end{aligned}$$

Stosując wzór

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}$$

na sumę postępu geometrycznego o ilorazie $q = 1 + \frac{p}{100}$, otrzymamy wzór na końcowy kapitał po n latach spłacania kredytu.

$$K_n = K_0(1+\frac{p}{100})^n - 12R\frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{1+\frac{p}{100} - 1} = K_0(1+\frac{p}{100})^n - 12R*100\frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{p} \quad (4.2)$$

Przykład 4.2 *Oblicz do jakiej sumy zmaleje kredyt od kapitału* $K_0 = 300000PLN$ *po 20 latach spłacania kredytu obciążonego* $p = 5\%$ *przy ratach miesięcznych* $R = 2000PLN$.

Rozwiązanie. Stosując wzór (4.2) dla $K_0 = 300000,\ n = 20,\ R = 2000,\ p = 5$, obliczamy

$$K_{20} = 300000(1+\frac{5}{100})^{20} - 12 * 2000 * 100\frac{(1+\frac{5}{100})^{20} - 1}{5} = 2406.41$$

Odpowiedź: Po 20 latach kredyt zmaleje do sumy $K_{20} = 2406.41PLN$.

Zadanie 4.13 *Oblicz do jakiej sumy zmaleje kredyt* $K_0 = 500000PLN$ *po 20 latach spłaconia, jeżeli raty miesięczne* $R = 2500$, *a procent* $(i)\ \ p = 5\%, \quad (ii)\ \ p = 6\%$.[1]

[1] Jeżeli roczny wzrost kredytu równy jest sumie 12 rat spłaty kredytu to kredyt K_0 nigdy nie zmaleje i nie wzrośnie

Chapter 5

Ciągi arytmetyczne i geometryczne. Szeregi arytmetyczne i postępy geometryczne.

Wyrażenia postaci

$$a_0,\ \ a_1 = a_0 + r,\ \ a_2 = a_0 + 2r,\ \ a_3 = a_0 + 3r, ..., a_n = a_0 + n\ \ r; \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

nazywamy ciągiem arytmetcznym, gdzie $a_0 \in R$ jest pierwszym wyrazem ciągu i różnica $a_n - a_{n-1} = r \in R$ jest stała dla ciągu $\{a_k\}_{k=1}^{n}$.
Zatem wyraz ogólny ciągu a_n można zapisać wzorem

$$a_n = a_0 + n\ r, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu wynosi

$$a_{n+1} - a_n = a + (n + 1)r - (a + n\ r) = r, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Na przyład, ciąg kolejnych liczb naturalnych

$$0, 1, 2, ...;$$

jest ciągiem arytmetycznym o wyrazie pierwszym $a_0 = 0$, różnicy $r = 1$ i o wyrazie ogólnym $a_n = n$.
Średnia Arytmetyczna. Zauważmy, że wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.
Rzeczywiście, obliczamy

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_0 + (n - 1)r) + (a_0 + (n + 1)r)}{2} = \frac{2a_0 + 2nr}{2} = a_n$$

Również sumy dwóch wyrazów odległych o liczbę k od a_0 i o liczbę k od a_n

$$a_0 + a_n = a_k + a_{n-k}$$

są równa dla każdego $k = 0, 1, 2, ...n$;
Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego $k = 0, 1, 2, ..., n$, may

$$a_k + a_{n-k} = \underbrace{a_0 + kr}_{a_k} + \underbrace{a_0 + (n-k)r}_{a_{n-k}} = a_0 + \underbrace{a_0 + nr}_{a_n} = a_0 + a_n.$$

Przykład 5.1 *Sprawdź czy następujący ciąg jest artmetyczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{3n+1}{3}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$
$$(ii) \quad a_n = 1 + n^2, \quad n = 0, 1, 2, ..., :$$

Rozwiązanie (i). Sprawdzamy czy różnica r kolejnych wyrazów tego ciągu jest stała, to znaczy jest niezależna od n

$$r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{\frac{3(n+1)+1}{3}}_{a_{n+1}} - \underbrace{\frac{3n+1}{3}}_{a_n} = \frac{3n+1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3n+1}{3} = \frac{1}{3}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg (i) jest arytmetyczny, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami tego ciągu jest stała $r = \frac{1}{3}$ i nie zależy od $n = 0, 1, 2, ...$;
Rozwiązanie (ii). Sprawdzamy czy różnica kolejnych wyrazów ciągu jest stała, to znaczy, że niezależy od n

$$r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{1 + (n+1)^2}_{a_{n+1}} - \underbrace{(1 + n^2)}_{a_n} = 1 + n^2 + 2n + 1 - (1 + n^2) = 1 + 2n,$$

Odpowiedź: Widzimy, że ciąg (ii) nie jest ciągiem arytmetyczny, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu $r = 2n + 1$ dla $n = 0, 1, 2, ...$; zależy od n.

5.0.1 Zadania

Zadanie 5.1 *Sprawdź czy następujący ciąg jest artmetyczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{8n+1}{5}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$
$$(ii) \quad a_n = 1 + 2^n, \quad n = 0, 1, 2, ..., :$$

Postęp Arytmetyczny. Postępem arytmetycznym nazywamy sumę wyrazów ciągu arytmetycznego

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

lub

$$a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \cdots + (a_0 + nr),$$

W sigma notacji piszemy szereg arytmetyczny jako następującą sumę:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

lub

$$\sum_{k=0}^{n} (a_0 + kr) = a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \cdots + (a_0 + nr).$$

Łatwo wyprowadzić wzór na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego.
Mianowicie, oznaczmy sumę przez

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Napiszmy tą sumę w odwrotnej kolejności dodawania wyrazów

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$

Dodając stronami, otrzymamy

$$2S_n \quad = \quad (a_0 + a_n) + (a_1 + a_{n-1}) + (a_2 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_1) + (a_n + a_0)$$

Ponieważ, wyrazy postępu arytmetycznego spełniają równość

$$a_0 + a_n = a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \cdots = a_n + a_0$$

dlatego, suma wyrazów ciągu arytmetycznego

$$2S_n = (n+1)(a_0 + a_n)$$

lub

$$S_n = \frac{n+1}{2}(2a_0 + nr).$$

Przykład 5.2 *Oblicz sumę postępu arytmetycznego*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że w tym postępie arytmetycznym pierwszy wyraz $a_0 = 0$ i różnica $r = 1$.
Stosując powyższy wzór, znajdujemy sumę

$$S_n = \frac{(n+1)}{2}(2a_0 + nr) = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Zadanie 5.2 *Oblicz sumę n wyrazów postępu arytmetycznego o wyrazie ogólnym*

$$a_n = \frac{3n+5}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, ...,;$$

5.1 Ciągi i postępy geometryczne.

Wyrażenie postaci

$$a_0, \;\; a_0 q, \;\; a_0 q^2, \;\; a_0 q^3, \;\; ... \;, a_0 q^n \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

nazywamy ciągiem geometrycznym, gdzie $a_0 \in R$ jest pierwszym wyrazem ciągu i $q \in R$ jest ilorazem ciągu.
Zatem wyraz ogólny ciągu geometrycznego określamy wzorem

$$a_n = a_0 q^n, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Zakładamy, nie trywialny przypadek, gdy $a_0 \neq 0, \; q \neq 0$.
Iloraz q dwóch kolejnymi wyrazów ciągu jest stały, to znaczy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = constant, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Na przykład, ciąg liczb

$$1, 2, 2^2, 2^3 ...; 2^n$$

o wyrazie pierwszym $a_0 = 1$, ilorazie $q = 2$ i o wyrazie ogólnym $a_n = 2^n$ jest ciągiem geometrycznym. Zauważmy, że gdy iloraz $q = 0$ to ciąg geometryczny jest o wyrazie ogólnym stałym $a_n = a_0$ dla każdego $n1, 2, ...$;

Średnia Geometryczna. Zauważmy, że wartość bezwzględna wyrazu ciągu geometryczngo jest średnią geometryczną wyrazu poprzedniego i następnego

$$|a_n| = \sqrt{|a_{n-1}a_{n+1}|}$$

Rzeczywiście, obliczamy

$$a_{n-1} * a_{n+1} = a\ q^{n-1} * a * q^{n+1} = a^2 * q^{2n} = a_n^2.$$

Skąd wynika średnia geometryczna

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} * a_{n+1}}$$

Również iloczyny dwóch wyrazów odległych o liczbę k od a_0 i liczbę k od a_n

$$a_0 * a_n = a_k * a_{n-k}$$

są równa dla każdego $k = 0, 1, 2, ...n$;
Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego $k = 0, 1, 2, ..., n$

$$a_k * a_{n-k} = \underbrace{a_0 * q^k}_{a_k} * \underbrace{a_0 * q^{n-k}}_{a_{n-k}} = \underbrace{a_0(a_0 q^n)}_{} = a_0 * a_n.$$

Przykład 5.3 *Sprawdź czy następujący ciąg o danym wyrazie ogólnym jest geometryczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{3^n}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$
$$(ii) \quad a_n = n^2, \quad n = 1, 2, ..., :$$

Rozwiązanie (i). Sprawdzamy czy iloraz q kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}) : (\frac{3^n}{2^n}) = \frac{3^{n+1} * 2^n}{2^{n+1} * 3^n} = \frac{3}{2} = q, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu jets stały i nie zależy od n, $q = \frac{3}{2}$ dla $n = 0, 1, 2, ...$;

Rozwiązanie (ii). Sprawdzamy czy iloraz q kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od n

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg nie jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu $q = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ dla $n = 1, 2, ...$; zależy od n.

Przykład 5.4 *Z czterech liczb x, y, z, t trzy pierwsze tworzą ciąg arytmetyczny, których suma równa jest* 12, *a trzy ostatnie tworzą ciąg geometryczny, których suma równa jest* 15. *Znajdź te liczby*

Rozwiązanie. Wiemy, że suma trzech pierwszych liczb równa jest 12, a suma trzech ostatnich liczb równa jest 19. Zatem mamy dwa równania liniowe

$$\begin{aligned} x+y+z &= 12 \\ y+z+t &= 19 \end{aligned}$$

Trzy pierwsze liczby tworzą ciąg arytmetyczny, dlatego różnica pomiędzy drugą liczbą y i pierwszą x jest ta sama jak różnica pomiędzy trzecią z i drugą y

$$y-x=z-y$$

Podobnie trzy ostatnie liczby tworzą ciąg geometryczny, dlatego iloraz trzeciej z i liczby drugie y jest taki sam iloraz jak czwarej liczby t i trzeciej liczby z

$$\frac{z}{y}=\frac{t}{z}$$

W ten sposób otrzymaliśmy układ czterech równań z czteremi niewiadomymi

$$\begin{aligned} x+y+z &= 12 \\ y+z+t &= 19 \\ y-x &= z-y \\ \frac{z}{y} &= \frac{t}{z} t = \frac{2z^2}{x+z} \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego układu znajdujemy metodą eleminacji Gaussa. Mianowicie, z ostatnich dwóch równań znajdujemy

$$y=\frac{x+z}{2} \quad oraz \quad t=\frac{2z^2}{y+z}$$

Po podstawieniu do pierwszych dwóch równań i redukcji wyrazów podobnych otrzymamy równania

$$\begin{aligned} x+z &= 8 \\ z^2+4z-60 &= 0 \end{aligned}$$

Równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste

$$z_1=9, \qquad z_2=-10$$

Skąd znajdujemy dwa rozwiązania

$$x_1=2, \quad y_1=4, \quad z_1=6, \quad t_1=9$$

oraz

$$x_2=18, \qquad y_2=4, \quad z_2=-10, \quad t_2=25$$

5.1.1 Zadania

Zadanie 5.3 *Sprawdź czy następujący ciąg jest geometryczny.*

$$\begin{aligned} &(i) \quad \frac{(\sqrt{2})^n}{5^n}, ... \qquad n=0,1,2,...; \\ &(ii) \quad \sqrt{n}, ... \qquad n=1,2,...; \end{aligned}$$

Zadanie 5.4 *Podaj pierwszy wyraz, n-ty wyraz i oblicz iloraz ciągu geometrycznego*

$$(i) \quad \frac{1}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{3^2}{5},\ \frac{3^3}{5}, ...;$$

$$(ii) \quad \sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ 4\sqrt{2}, ... :$$

Zadanie 5.5 *Z czterech liczb* $m,\ n,\ k,\ l$ *trzy pierwsze tworzą ciąg arytmetyczny, których suma równa jest* 3, *a trzy ostatnie tworzą ciąg geometryczny, których suma równa jest* 9. *Znajdź te liczby*

Chapter 6

Liczby pierwsze. Algorytm Euklidesa

Liczba 2 *jest jedyną liczbą pierwszą najmniejszą i parzystą*

Liczba 1 nie jest liczbą pierwszą

6.1 Wstęp

Jedną z najważniejszych operacji na liczbach jest rozkład dowolnej liczby naturalnej na czynniki liczb pierwszych. Rozkład liczb na czynniki pierwsze podajemy na podstawie fundamentalnego twierdzenia arytmetyki.
Bezpośrednią konsekwencją rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze jest wyznaczanie największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotności dwóch liczb naturalnych. Jednym z optymalnych algorytmów wyznaczania namniejszego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych jest *algorytm Euklidesa*.

6.2 Liczby pierwsze

Opis liczb pierwszych należy zacząć od definicji

Defimnicja 6.1 *Liczbę naturalną $p > 1$ nazywamy liczbą pierwszą, jeżeli ma dokładnie dwa dzielniki, to jest liczbę* 1 *i samą siebie p. To znaczy, ze liczby pierwsze dzielą się tylko przez liczbę* 1 *i przez siebie samą. Każda inna liczba nazywa się liczbą złożoną.*

Zauważmy, że liczba natyralna $p = 1$ nie jest liczbą pierwszą, gdyż ma tylko jeden dzielnik samą siebie i nie jest większa od 1. Liczba 0 również nie jest pierwsza bo jest mniejsza od 1 i ma więcej dzielników niż dwa, gdyż podzielona przez dowolną liczbę naturalną, różną od zera, daje wynik 0. Wymieńmy kilka kolejnych liczb pierwszych

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 51, 53, 59, 61...;$$

Z defincji wynika w sposób oczywisty, że liczba $p = 2$ jest jedyną liczbą pierwszą parzystą.
Zbiór liczb pierwszych nie jest zamknięty na operację arytmetyczne. Wystarczy podać kontr-przykład.

Przykład 6.1 *Mianowicie liczby* $m = 7$ *i* $n = 3$ *są pierwsze jednak ich suma* $m + n = 7 + 3 = 10$ *nie jest liczbą pierwszą i różnica* $7 - 3 = 4$ *też nie jest liczbą pierwszą. Podobnie iloczyn tych liczb* $m * n = 3 * 7 = 21$ *nie jest liczbą pierwszą.*

Jedna z najważniejszych własności liczb pierwszych opisana jest w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 6.1 Fundamentalne Twierdzenie Arytmetyki. *Każdą liczbę naturalną* $m > 1$ *można przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych. Taki rozkład jest jedyny.*
Inaczej, jeżeli n jest liczbą naturalną to istnieją liczby pierwsze

$$p_1, p_2, p_3 \cdots, p_k$$

takie, że

$$n = p_1 * p_2 * p_3 * \cdots * p_k$$

6.3 Rozkład liczb na czynniki pierwsze

Z fundamentalnego twierdzenia arytmetyki wiemy, że każda liczba naturalna $m > 1$ ma postać iloczynu liczb pierwszych. Inaczej, każda liczba naturalna dodatnia $m > 1$ rozkłada się na iloczyn liczb pierwszych. Co więcej taki rozkład jest jedyny. To znaczy, że nie ma innego rozkładu tej liczby naturalnej m na czynniki liczb pierwszych, oprócz czynników $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$.
Sposób rozkładu liczby naturalnej m na czynniki pierwsze jest prosty. Mianowicie, dzielimy liczbę m przez kolejne liczby pierwsze. Wtedy liczba m równa się iloczynowi jej dzielników.

Przykład 6.2 *Rozłóż liczbę* $m = 1638$ *na czynniki pierwsze.*

posłużymy się schematem

1638	|	2
819	|	3
273	|	3
91	|	7
13	|	13
1		

Liczba 1638 rozkłada się na czynniki $2, 3, 3, 7, 13$
To znaczy

$$1638 = 2 * 3 * 3 * 7 * 13$$

Przykład 6.3 *Rozłóż liczbę m=5040 na czynniki pierwsze. posłużymy się schematem*

5040	|	2
2520	|	2
1260	|	2
630	|	2
315	|	3
105	|	5
21	|	3
7	|	7
1	|	

Liczba $m = 5040$ rozkłada się na czynniki $2, 2, 2, 2, 3, 5, 3, 7$, To znaczy

$$5040 = 2 * 2 * 2 * 2 * 3 * 5 * 3 * 7.$$

Zauważmy, że siedem silnia równa się

$$7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$$

W tym rozkładzie mamy liczby złożone

$$4 = 2 * 2 \quad i \quad 6 = 2 * 3$$

.

6.3.1 Zadania

Zadanie 6.1 *Wiadomo, że liczba naturalna m jest podzielna przez* 5 *i rozkłada się na* 3 *czynniki pierwsze, których suma równa jest* 14. *Znajdź liczbę m.*

Zadanie 6.2 *Wiadomo, że liczba naturalna m jest podzielna przez* 5 *i rozkłada się na* 3 *czynniki pierwsze, których suma równa jest* 19. *Znajdź wszystkie wartości liczby m.*

6.4 Największy wspólny dzielnik $NWN(a, b)$

Największy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych a *i* b oznaczamy symbolem $NWD(a, b)$. Jednym ze sposobów obliczania największego wspólnego dzielnika danych liczb naturalnych a *i* b jest rozkład tych liczb na czynniki liczb pierwszych.

Rozpatrzmy kilka przykładów obliczania $NWD(a, b)$ przez rozkład liczb a i b na czynniki pierwsze

Przykład 6.4 *Niech liczba* $a = 21$ *i liczba* $b = 57$. *Rozkład tych liczb jest oczywisty*

$$21 = 3 * 7 \ \ i \ \ 57 = 3 * 19$$

Wspólnym dzielnikiem liczb 21 *i* 57 *jest liczba* 3, *ponieważ liczba* 3 *dzieli liczbę* 21 *i dzieli liczbę* 57. *Poza tym te liczba nie mają innych wspólnych dzielników.*
Skąd mamy wartość największego wspólnego dzielnika

$$NWD(21, 57) = 3$$

obliczzanie nai większego wspólnego dzielnika

Przykład 6.5 *Znajdż największy wspólny dzielnik liczb* 42 *i* 78.

Rozkładamy obie liczby na czynniki pierwsze według schematu

42	|	2,	78	|	2
21	|	3,	39	|	3
7	|	7,	13	|	13
1	|		1	|	

Skąd mamy rozkład liczb

$$42 = 2 * 3 * 7 \quad i \quad 78 = 2 * 3 * 13$$

Wspólnymi czynnikami tych liczb są 2 i 3. Dlatego największym wspólnym dzielnikiem liczb 42 i 78 jest liczba $NWD(42,78) = 2*3 = 6$.

Rozpatrzy jeszcze jeden przykład wyznaczania największego wspólnego dzielnika przez rozkład liczb na czynniki pierwsze

Przykład 6.6 *Znajdż największy wspólny dzielnik liczby* 210 *i liczby* 231

$$\begin{array}{rl|rl} 210 & | \ 2, & 231 & | \ 3 \\ 105 & | \ 3, & 77 & | \ 7 \\ 35 & | \ 7, & 11 & | \ 11 \\ 5 & | \ 5 & 1 & | \\ 1 & | & & \end{array}$$

Skąd mamy rozkład liczb 210 i 231 na czynniki pierwsze

$$210 = 2*3*7*5 \quad i \quad 231 = 3*7*11$$

Wspólnymi dzielnikami tyczh liczb są 3 i 7. Dlatego największym wspólnym dzielnikiem liczb 210 i 231 jest $NWD(210,231) = 3*7 = 21$.
Sprawdzamy, że liczba $NWD(210,231) = 21$ dzieli liczby 210 i 231

$$210 : 21 = 10 \quad oraz \quad 231 : 21 = 11.$$

6.5 Algorytm Euklidesa (325-265 B.C.)

Najbardziej efektywnym sposobem wyznaczania największego wspólnego dzielnika jest algorytm Euklidesa. Już w starożytnych czasach w Egipcie, Euklides grecki nauczyciel i dziekan wydzialu nauk przyrodniczych na Uniwersytecie w Aleksandrii podał algorytm na znajdowanie największego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych.

Algorytm Euklidesa. Największy wspólny dziellnik danych liczby naturalne a i b obliczamy tworząc wyrazy ciągu malejącego

$$r_0 > r_1 > r_2 > r_4 > ... > r_{n-1} > r_n$$

reszt z dzielenia startując z danych liczb $r_0 = a$ i $r_1 = b$, według algorytmu

$$\begin{array}{lcll} \frac{r_0}{r_1} & = & k_2 + \frac{r_2}{r_1}, & r_2 = r_0 - k_2 * r_1 \\ \frac{r_1}{r_2} & = & k_3 + \frac{r_3}{r_2}, & r_3 = r_1 - k*3*r_2 \\ \frac{r_2}{r_3} & = & k_4 + \frac{r_4}{r_3}, & r_4 = r_2 - k_4 * r_3 \\ . & . & ..... & \\ \frac{r_{n-1}}{r_n} & = & k_{n+1} + \frac{r_{n+1}}{r_n}, & r_n = r_{n-2} - k_n * r_{n-1} \end{array}$$

Zauważmy, że powyższe wzory możemy zapisać jednym wzorem rekurencyjnym

$$r_i = r_{i-2} - k_i * r_{i-1}, \quad dla \ \ r_0 = a, \quad r_1 = b, \quad i = 2,3,...,n, \tag{6.1}$$

gdzie współczynniki $k_i = E[\frac{r_i}{r_{i+1}}]$. $i = 2, 3, 4, \ ...$ są liczbami całkowitymi.[1]
Ostatni wyraz ciągu $r_n \neq 0$ różny od zera jest największym wspólnym dzielnikiem dwóch pierwszych wyrazów $r_0 = a, \ r_1 = b$. To wynika ze wzoru rekurencyjnego (6.1). piszemy

$$r_n = NWD(r_0, r_1) = NWD(a, b).$$

Mianowicie, jeżeli liczba $d = NWD(r_0, r_1)$ jest dzielnikiem liczb r_0 i r_1 to d jest również dzielnikiem każdej następnej reszty

$$r_2 = r_0 - k_2 * r_1$$

$$r_i = r_{i-2} - k_i * r_{i-1}, \quad dla \ \ i = 2, 3, ..., n,$$

Konstrukcje ciągu rekurencyjnego (6.1) wijaśnimy na przykładach.

Przykład 6.7 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* $r_0 = 78 \ \ i \ \ r_1 = 42$ *stosując algorytm Euklidesa (6.1)*

1. Dzielimy liczbę większą $r_0 = 78$ przez liczbę mniejszą $r_1 = 48$, według schematu

$$\frac{r_0}{r_1} = k_2 + \frac{r_2}{r_1}, \qquad r_0 = k_2 * r_1 + r_2$$
$$\frac{78}{42} = 1 + \frac{36}{42}, \quad k_2 = 1, \quad 78 = 1 * 42 + 36.$$

i obliczamy resztę r_2 z dzielenia liczb $r_0 = 78$ przez $r_1 = 42$

$$r_2 = r_0 - k_2 * r_1,$$

$$r_2 = 78 - 1 * 42 = 36.$$

gdzie $k_2 = E[\frac{r_0}{r_1}]$ oznacza całość z dzielenia r_0 przez r_1.
[2]

2. Podstawiamy $r_1 = 42, \ \ r_2 = 36$ i dzielimy liczbę większą $r_1 = 42$ przez liczbę mniejszą $r_2 = 36$, według schematu

$$\frac{r_1}{r_2} = k_3 + \frac{r_3}{r_2}, \qquad r_1 = k_3 * r_2 + r_3$$
$$\frac{42}{36} = 1 + \frac{6}{36}, \quad k_3 = 1, \quad 42 = 1 * 36 + 6.$$

i obliczamy resztę z dzielenia liczb $r_1 = 42$ i $r_2 = 36$

$$r_3 = r_1 - k_3 * r_2,$$

$$r = 42 - 36 = 6.$$

3. Podstawiamy $r_2 = 36, \ \ r_3 = 6$ i dzielimy liczbę większą $r_2 = 36$ przez liczbę mniejszą $r_3 = 6$, według schematu

$$\frac{r_2}{r_3} = k_4 + \frac{r_4}{r_3}, \qquad r_2 = k_4 * r_3 + r_4$$
$$\frac{36}{6} = 6, \qquad k_4 = 6, \quad 36 = 6 * 6 + 0.$$

[1] E[x] entire of x oznacza całość z liczby x
[2] E[x] entire of x oznacza całość z liczby x

i obliczamy resztę z dzielenia liczb $r_2 = 42$ i $r_3 = 36$

$$r_4 = 36 - k_4 * 6,$$

$$r_4 = 36 - 36 = 0.$$

Największym wspólnym dzielnikiem liczb 78 i 42 jest ostatnia reszta $r_3 = 6$ różna od zera, piszemy $NWD(78, 36) = 6$

Rozpatrzymy następny przykład zastosowania algorytmu Euklidesa (6.1).

Przykład 6.8 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* $r_0 = 1995$ *i* $r_1 = 1190$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie znajdujemmy największy wspólny dzielnik liczb 1995 *i* 1190 stosując wzór (6.1)

$$\begin{array}{c|c} r_0 = 1995, \;\; r_1 == 1190 & \textit{reszta } r \\ \hline \dfrac{1995}{1190} = 1 + \dfrac{805}{1190} & r_2 = 805 \\ \dfrac{1190}{805} = 1 + \dfrac{6}{385} & r_3 = 385 \\ \dfrac{805}{385} = 2 + \dfrac{35}{385} & r_4 = 35 \\ \dfrac{385}{35} = 11 & r_5 = 0 \end{array}$$

Największym wspólnym dzielnikiem liczb 1995 i 1190 jest ostatnia reszta $r_4 = 35$ różna od zera, piszemy $NWD(1995, 1190) = 35$

Przykład 6.9 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* 975 *i* 690

Rozwiązanie.
Stosujemy wyżej opisany algorytm Euklidesa obliczajmy kolejne reszty

$$\begin{array}{c|c} a = r_0 = 975, \;\; b = r_1 = 690 & \textit{reszta} \\ \hline \dfrac{975}{690} = 1 + \dfrac{285}{690} & r_2 = 975 - 1 * 690 = 285 \\ \dfrac{690}{285} = 2 + \dfrac{120}{285} & r_3 = 690 - 2 * 285 = 120 \\ \dfrac{285}{120} = 2 + \dfrac{45}{120} & r_4 = 285 - 2 * 120 = 45 \\ \dfrac{120}{45} = 2 + \dfrac{30}{45} & r_5 = 120 - 2 * 45 = 30 \\ \dfrac{45}{30} = 1 + \dfrac{15}{30} & r_6 = 45 - 1 * 30 = 15 \\ \dfrac{30}{15} = 2 & r_7 = 0 \end{array}$$

Ciąg reszt

$$975 > 690 > 285 > 120 > 45 > 30 > 15$$

jest malejący.
Ostatnia reszta z dzielenia $r_6 = 15$ różna od zera jest największym wspólnym dzielnikiem liczb naturalnych $r_0 = 975$ i $_1 = 690$, piszemy

$$NWD(975, 690) = 15.$$

Zauważmy, że największy wspólny dzielnik $r_6 = 15$ liczb $r_0 = 975$ i $r_1 = 690$ jest również największym wspólnym dzielnikiem wszystkich poprzednich reszt

$$r_2 = 285,\ r_3 = 120,\ r_4 = 45,\ r_5 = 30,\ r_6 = 15$$

[3]

6.6 Najmniejsza wspólna wielokrotność

Wspólną wielokrotnością danych liczb naturalnych a, b jest trzecia liczba naturalna m, która jest podzielna przez obie liczby a i b. Wspólnych wielokrotności danych liczb naturalnych jest nieskończenie wiele. Wybieramy najmnieszą z nich $NWW(a, b)$.

Przykład 6.1 *Dla liczb* 5 *i* 7 *wspólną wielokrotnością jest ich iloczyn* $5 * 7 = 35$. *Liczba* 35 *jest najmniejsza wspólna wielokrotność liczb* 5 *i* 7. *Inną wspólną wielokrotność liczb* 5 *i* 7 *jest liczba* 70, *ponieważ* $70 : 5 = 24$ *i* $70 : 7 = 10$. *Jednak* 70 *nie jest najmnieszą wspólną wielokrotnością liczb* 5 *i* 7.

Najmniejszą wspólną wielokrotność znajdujemy przez rozkład danych liczb na czynniki liczb pierwszych.

Przykład 6.2 *Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotnść liczb* 120 *i* 210
Rozkładamy liczby 120 *i* 210 *na czynniki pierwsze według schematu*

120|	2,	210|	2
60|	2,	105|	3
30|	2,	35|	5
15|	3,	7|	7
5|	5	1|	
1|		|	

Wybieramy wspólne czynniki w rozkładzie obu liczb : $2, 3$ i 5. Następnie do iloczynu $2*3*5$ dopisujemy czynniki, które nie są wspólne, to znaczy, że nie powtarzają się. To są czynniki 4 i 7.
Najmniejszą wspólną wielokrotnością jest iloczyn tych czynników

$$NWW(120, 210) = 2 * 3 * 5 * 4 * 7 = 1540$$

Przykład 6.3 *Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotnść liczb* 910 *i* 1155
Rozkładamy liczby 910 *i* 1190 *na czynniki pierwsze według schematu*

910|	2,	1155|	3
455|	5,	385|	5
91|	7,	77|	7
13|	13,	11|	11
1|		1|	

[3] Prosty algorytm Euklidesa z powodzeniem stosuje się w systemach obliczeniowych. Jest łatwy w pisaniu kodu w językach programowania.

Wybieramy wspólne czynniki w rozkładzie obu liczb : 5 i 7. Następnie do iloczynu $5 * 7$ dopisujemy czynniki, które nie są wspólne, to znaczy, że nie powtarzają się. To są czynniki $2, 3, 11, 13$.
Najmniejszą wspólną wielokrotnością jest iloczyn tych czynników

$$NWW(910, 1155) = 5 * 7 * 2 * 3 * 11 * 13 = 30030$$

6.6.1 Zadania

Zadanie 6.3 *Rozłóż na czynniki pierwsze liczby*

$$(i) \quad a = 184, \qquad (ii) \quad b = 6006$$

Zadanie 6.4 *Podaj resztę z dzielenia liczby a przez liczbę b*

(i) $a = 254 \quad i \quad b = 15$

(ii) $b = 2672 \quad i \quad b = 848$

Zadanie 6.5 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* 425 *i* 125

(i) przez rozkład tych liczb na czynniki pierwsze.

(ii) stosując algorytm Euklidesa

Zadanie 6.6 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb stosując algorytm Euklidesa*

$$2672 \ i \ 848$$

Zadanie 6.7 *Sprawd, czy dla* $p = 3$ *liczby* $p + 10$ *i* $p + 20$ *są liczbami pierwszymi.*

Udowodni, że dla dowolej liczby pierwszej $p \neq 3$ *przynajmniej jedna z liczb* $p + 10$ *lub* $p + 20$ *jest liczb złożoną*

Zadanie 6.8 *Wyznacz wszystkie rozwiązania układu równań*

$$x + y = 180$$

$$NWD(x, y) = 30$$

[4]

Zadanie 6.9 *Znajdź najmniejszą wspólną wielokrorną liczb*

$$(i) \quad 9 \quad i \quad 12$$

$$(ii) \quad 36 \quad i \quad 48$$

Zadanie 6.10 *Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotność liczb*

(i) 25 *i* 235

(ii) 512 *i* 5040

Zadanie 6.11 *Czy liczbę pierwszą p można przedstawić w postaci iloczynu różnicy i sumy liczb naturalnych a i b*

$$p = (a - b)(a + b)$$

Zadanie 6.12 *Wykaż, że dla każdej liczby pierwszej* $p > 4$ *liczba* $(p-1)(p+1)$ *jest podzialna przez* 24

[4] NWD(x,y) oznacza największy wspólny dzielnik liczby x i liczby y.

Chapter 7

Reprezentacja liczb w arytmetyce komputerowej

Błąd bezwzględny zaokrąglenia liczby x

$$\epsilon_x = x - fl(x)$$

Błąd względny zaokrąglenia liczby $x \neq 0$

$$\delta_x = \frac{x - fl(x)}{x}$$

Błąd procentowy zaokrąglenia liczby $x \neq 0$

$$\delta_x^{\%} = \frac{x - fl(x)}{x} * 100\%$$

Liczby w zapisie dziesiętnym zokrąglamy na r-tym miejscu po przecinku w ten sposób, że do cyfry na r-tym miejscu dodajemy 1, jeżeli następna cyfra jest większa lub równa 5. W przeciwnym razie cyfry po r-ym miejscu kasujemy. Operacje zaokrąglania liczby x na r-tym miejscu oznaczamy symbolem $fl_r(x)$.

Przykład 7.1 *Zaokrąglamy liczbę* $\frac{22}{7}$ *na 5-tym miejscu po przecinku.*
Ułamek zwykły $\frac{22}{7}$ *zamieniamy na ułamek dziesiętny dzieląc licznik* 22 *przez mianownik* 7.

$$\frac{22}{7} = 22 : 7 = 3.142857142857...;$$

W wyniku dzielenia otrzymaliśmy liczbę 3.142857142857...; *o nieskończonej ilości cyfr po przecinku. Na piątym miejscu po przecinku tej liczby jest cyfra* $r = 5$, *a następna cyfra* 7. *Zatem zaokrąglamy liczbę* 3.142857142857...; *dodając* 1 *do cyfry* 5.

$$\frac{22}{7} = 3.142857142857...; \quad fl_5(3.142857142857...) = 3.14286, \quad r = 5.$$

7.1 Zapis liczb w zmiennym przecinku

W obliczeniach z użyciem systemów obliczeniowych i komputerów liczby zapisywane są w postaci zmiennego przecinka

$$x = \mp m10^c, \quad m - \text{ mantysa}, \quad c - \text{ cecha},$$

gdzie mantysa $m = 0.\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r \ ; \ \alpha_1 \neq 0 \ ; \ 0 \leq \alpha_i \leq 9 \ ; \ i = 1, 2, \ldots, r$ Najbardziej znacząca cyfra $\alpha_1 \neq 0$ jest zawsze różna od zera.
Dlatego mantysa m spełnia następującą nierówność

$$0.1 \leq m < 1.$$

Jasne, że liczba x może mieć dokładną zmienno przecinkową reprezentacje w komputerze, jeżeli jej mantysa ma skończoną liczbę cyfr.

Na przykład $\frac{1}{4}$ ma dokładną reprezentacje gdyż jej mantysa $m = 0.25$ i cecha $c = 0$.
Natomiast, mantysa liczby

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

ma nieskończenie wiele cyfr $m = 0.333...$, i nie ma dokładnej reprezentacji komputerowej.
Każdą liczbę, nawet z mantysą o nieskończonej ilości cyfr, można zapisać w komputerze z dokładnością błędu zaokrąglenia mantysy na r-tym miejscu po przecinku.

$$\epsilon \leq 0.\underbrace{000...0}_{r-zer}5 = 0.5\ 10^{-r}.$$

Na przykład

$$x = \frac{2}{3} = 0.66666666666...$$

zaokrąglone na 4-tym miejscu po przecinku ($r = 4$)

$$fl(x) = 0.6667$$

ma błąd zaokrągleń $\epsilon = 0.0000333...$

Zadanie 7.1 *Zaokrąglij następujące liczby na 3-cim miejscu po przecinku i zapisz je w zmiennym przecinku*

7.2 Błąd bezwzględny zaokrąglenia.

Błądem bezwzgędnym zaokrąglenia liczby x zapisanej w zmiennym przecinku

$$x = \mp m10^c$$

nazywamy różnicę

$$\epsilon_x = fl_r(x) - x$$

Ten błąd spełnia nierówność

$$\mid fl_r(x) - x \mid \leq \epsilon * 10^c,$$

gdzie $\epsilon = 0.5\ 10^{-r}$.
Niech

$$x = 0.57367864 * 10^2, \quad r = 3.$$

Wtedy błąd bezwględny liczby x na trzecim miejscu po przecinkuzlędny zaokąglenia wynosi

$$\mid fl_3(0.57367864 * 10^2) - 0.57367864 * 10^2 \mid =$$

$$\mid 0.574 * 10^2 - 0.57367864 * 10^2 \mid = 0.032136 < \frac{1}{2}\ 10^{-3} * 10^2 = 0.05.$$

7.3 Błąd względny zaokrąglenia.

Błąd względny zaokrąglenia danej liczby $x = \mp m\ 10^c \neq 0$ określamy jak następuje:

$$\delta_x = \frac{\epsilon_x}{x} = \frac{fl_r(x) - x}{x}, \quad \text{gdy } \ x \neq 0.$$

Ponieważ mantysa $m \geq 0.1$, dlatego błąd względny spełnia nierówność

$$| \frac{| fl_r(x) - x}{x} | \leq 0.5 * 10^{1-r}, \quad x \neq 0.$$

Rzeczywiście,

$$| \frac{fl_r(x) - x}{x} | = | \frac{fl_r(\mp m10^c) \pm m10^c}{\mp m10^c} | \leq | \frac{0.5 *\ 10^{-r}}{\mp m} | \leq 10\epsilon = 0.5 * 10^{1-r}.$$

Tak więc błąd względny nie przewyższa komputerowej precyzji $\delta = \frac{1}{2}10^{1-r}$.

Na przykład, jeżeli $r = 3$ wtedy komputerowa precyzja $\delta = \frac{1}{2}10^{-2}$

Obliczamy względny błąd zaokrąglenia liczby $x = 0.57367864 * 10^2$

$$|\frac{fl(x) - x}{x}| = \frac{0.032136}{0.57367864 * 10^2} = 0.0005601742.$$

Błąd względny bezpośrednio związany jest z błędem procentowym.
Mianowicie, błąd procentowy wyraża się wzorem

$$p\% = 100 * \delta_x\% = 100\frac{fl(x) - x}{x}\%, \quad \text{gdy } \ x \neq 0.$$

Obliczamy błąd procentowy liczby $x = 0.57367864 * 10^2$

$$\begin{aligned} p\% &= 100 *\ 0.5601742 * 10^{-3}\% \\ &= 0.5601742 * 10^{-1}\% = 0.05601742\%. \end{aligned}$$

Wyniki obliczeń w komputerze czterech operacji arytmetycznych $x \pm y$, xy i dzielenia x/y na ogół są niedokładne, nawet jeżeli x i y są dane w postaci dokładnej.

Na przykład, niech $x = 0.11111111$ i $y = 0.55555555$ będą 8-cyfrowymi liczbami w 8-mio cyfrowej arytmetyce w komputerze, (8-cyfr mantysa).

Zauważamy, że wynik mnożenia $xy = 0.617283938271605 * 10^{-1}$ ma 15-sto cyfrową mantysę $m = 0.617283938271605$, która automatycznie jest zaokrąglona w komputerze do 8 cyfrowej mantysy 0.61728394 z błędem bezwzględnym

$$\epsilon_x = 0.000000018271605.$$

Przykład 7.2 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego w 3 i 5-cio cyfrowej arytmetyce liczb w zapisie zmienno - przecinkowym*

$$\frac{2\frac{1}{3} * 3\frac{1}{7} + 45.27}{4\frac{2}{9}}$$

Podaj: błąd bezwzględny, błąd względny i błąd procentowy obliczeń.

Rozwiązanie. Najpierw, napiszemy liczby

$$x = 2\frac{1}{3},\ y = 3\frac{1}{7},\ z = 45.27,\ t = 4\frac{2}{9}$$

w postaci zmiennego przecinka, potem zaokrąglimy do miejsca $r = 3$ i podamy błąd zaokrąglenia każdej z danych liczb

$$\begin{array}{lll} x = 2\frac{1}{3} = 2.33333...; & fl_3(x) = 0.233 * 10, & \epsilon_x = 0.003333....; \\ y = 3\frac{1}{7} = 3.142857142857...; & fl_3(y) = 0.314 * 10, & \epsilon_y = 0.0042857....; \\ z = 45.27 & fl_3(z) = 0.453 * 10^2, & \epsilon_z = 0.07 \\ t = 4\frac{2}{9} = 4.222222...; & fl_3(t) = 0.422 * 10, & \epsilon_t = 0.00222....; \end{array}$$

Dalej, stosując reguły kolejności wykonywania operacji arytmetycznych, mnożenie, dzielenie, dodawanie i odejmowanie, obliczmy wartość wyrażenia w arytmetyce 3-cyfrowej:

$$\begin{array}{lcl} Iloczyn & = & fl_3(2\frac{1}{3}) * fl_3(3\frac{1}{7}) = fl_3(2.33 * 3.14) = fl_3(7.3162) = 7.32 \\ Suma & = & fl_3(7.32 + fl_3(45.274)) = fl_3(7.32 + 45.3) = fl_3(52.62) = 52.6 \\ Licznik & = & 52.6, \quad Mianownik = 4.22, \\ \dfrac{Licznik}{Mianownik} & = & fl_3(\dfrac{52.6}{4.22}) = fl_3(12.4645) = 12.5, \end{array}$$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia artmetycznego obliczonego w 3 cyfrowej arytmetyce wynosi 12.5
Teraz obliczmy wartość tego wyrażenia w 5-cio cyfrowej arytmetyce.
Mamy następujące dane:

$$\begin{array}{lll} x = 2\frac{1}{3} = 2.33333...; & fl_5(x) = 0.23333 * 10, & \epsilon_x = 0.00003333....; \\ y = 3fl_5\,\frac{1}{7} = 3.142857142857...; & fl_5(y) = 0.31429 * 10, & \epsilon_y = 0.000042857....; \\ z = 45.27 & fl_5(z) = 0.4527 * 10^2, & \epsilon_z = 0.0 \\ t = 4\frac{2}{9} = 4.222222...; & fl_5(t) = 0.42222 * 10, & \epsilon_t = 0.0000222....; \end{array}$$

Podobnie, obliczmy wartość wyrażenia arytmetycznego w 5-cio cyfrowej arytmetyce

$$\begin{array}{lcl} Iloczyn & = & fl_5(2\frac{1}{3}) * fl_5(3\frac{1}{7}) = fl_5(2.3333 * 3.1429) = fl_3(7.333333) = 7.3333 \\ Suma & = & fl_5(7.3333 + fl_5(45.27)) = fl_5(7.3333 + 45.27) = fl_5(52.6033) = 52.603 \\ Licznik & = & 52.603, \quad Mianownik = 4.2222, \\ \dfrac{Licznik}{Mianownik} & = & fl_5(\dfrac{52.603}{4.2222}) = fl_3(12.4587) = 12.459 \end{array}$$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia artmetycznego obliczonego wyżej w 5-cio cyfrowej arytmetyce wynosi 12.459

Dokładna wartość wyrażenia równa jes 12.457

Błąd bezwględny zaokrągleń w 3 cyfrowej arytmetyce $12.5 - 12.457 = 0.043$.

Błąd względny zaokrągleń w 3 cyfrowej arytmetyce $= \frac{0.043}{12.457} = 0.00345;\ 0.345\%$

Błądu bezwględny zaokrągleń w 5 cyfrowej arytmetyce $12.459 - 12.457 = 0.002$.

Błąd względny zaokrągleń w 5 cyfrowej arytmetyce $= \frac{0.002}{12.457} = 0.00016;\ 0.016\%$.

7.4 Zadania

Zadanie 7.2 *Zaokrąglij liczbę* $\frac{157}{50}$ *na 3-cim miejscu po przecinku.*

Zadanie 7.3 *Oblicz błąd bezwzględny liczby* 1.5782 *zaokrąglonej na trzecim mmiejscu po przecinku.*

Zadanie 7.4 *Oblicz błąd bezwzględny sumy liczb*

$$3,1415 + 1,5782$$

zaokrąglonej na trzecim mmiejscu po przecinku.

Zadanie 7.5 *Oblicz błąd bezwzględny iloczynu liczb*

$$3,1415 * 1,5782$$

zaokrąglonej na trzecim mmiejscu po przecinku.

Zadanie 7.6 *Oblicz błąd względny iloczynu liczb*

$$3,1415 * 1,5782$$

zaokrąglonej na trzecim mmiejscu po przecinku.

Zadanie 7.7 *Oblicz błąd względny ilorazu liczb*

$$\frac{3,1415}{1,5782}$$

zaokrąglonej na trzecim mmiejscu po przecinku.

Zadanie 7.8 *Oblicz błąd względny wyrażenia arytmetycznego*

$$1,5782 + 3,1415 = 0.72345$$

zaokrąglonego na trzeim mmiejscu po przecinku.

Zadanie 7.9 *Oblicz błąd względny wyrażenia arytmetyczngo*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

zaokrąglonego na trzeim mmiejscu po przecinku.

Zadanie 7.10 *Oblicz błąd względny wyrażenia arytmetycznego*

$$1.5782 + \frac{1}{3}$$

zaokrąglonego na trzeim mmiejscu po przecinku.

Zadanie 7.11 *Oblicz wartość następującego wyrażenia arytmetycznego w 3 i 5-cio cyfrowej arytmetyce w zapisie zmiennego przecinka*

$$\frac{7\frac{2}{3} * 9\frac{3}{7} + 125.97}{3\frac{7}{9}} + 256.75$$

Podaj błędy: bezwzględny, względny i procentowy obliczeń.

Chapter 8

Cechy podzielności liczb całkowitych. Kongruencja i operacja modulo

W tym rozdziale rozpatrujemy cechy podzielności i operacje dzielenia liczb całkowitych z resztą orzaz przystawanie modulo liczb całkowitych.

8.1 Cechy podzielności liczb naturalnych

Cechy podzielności liczb naturalnych wynikają z ogólnego zapisu liczb w systemie pozycyjnym. Przypominamy, że w systemie dziesiętnym, każdą liczbę n-cyfrową piszemy w postaci

$$\begin{aligned} m &= \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1\alpha_0 \\ &= \alpha_{n-1} * 10^{n-1} + \alpha_{n-2} * 10^{n-2} + \cdots + \alpha_1 * 10^1 + \alpha_0 * 10^0 \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \cdots, \alpha_1, \alpha_0$$

są cyframi liczby m o wartościach $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Teraz sformułujemy i podamy prosty dowód cechy podzielności liczby naturalnej przez 3

8.1.1 Cecha podzielności liczby naturalnej przez 3 lub przez 9

Liczba naturalna

$$m = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1\alpha_0$$

jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr

$$\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \cdots + \alpha_1 + \alpha_0$$

dzieli się przez 3. Ponadto, jeżeli suma cyfr liczby m dzieli się przez 9 to liczba m również jest podzielna przez 9.
Zanim podamy dowód tej cechy, rozpatrzmy kilka przykładów jej zastosowania.

Przykład 8.1 *Niech $m = 24$. Cyfry tej liczby dwucyfrowej, gdy $n = 2$, to $\alpha_1 = 2$ i $\alpha_0 = 4$ Suma cyfr*

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 2 + 4 = 6$$

jest podzielna przez 3. *Zatem liczba* 24 *jest podzielna przez* 3. *Rzeczywiście*

$$24 : 3 = 8$$

Przykład 8.2 *Niech* $m = 381$. *Cyfry tej liczby trzycyfrowej, gdy* $n = 3$, *to* $\alpha_2 = 3$, $\alpha_1 = 8$ *i* $\alpha_0 = 1$
Suma cyfr

$$\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 3 + 8 + 1 = 12$$

jest podzielna przez 3, *bo* $12 : 3 = 4$. *Zatem liczba* 381 *jest podzielna przez* 3. *Rzeczywiście*

$$381 : 3 = 127$$

Przykład 8.3 *Niech* $m = 5673$. *Cyfry tej liczby czterocyfrowej* $n = 4$, *to* $\alpha_3 = 5$, $\alpha_2 = 6$, $\alpha_1 = 7$ *i* $\alpha_0 = 3$
Suma cyfr

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 5 + 6 + 7 + 3 = 21$$

jest podzielna przez 3. *Zatem liczba* 5673 *jest podzielna przez* 3. *Rzeczywiście*

$$5673 : 3 = 1891$$

Przykład 8.4 *Niech* $m = 48537$. *Cytry tej liczby pięciocyfrowej, gdy* $n = 5$, *to* $\alpha_4 = 4$, $\alpha_3 = 8$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 7$ *i* $\alpha_0 = 7$
Suma cyfr

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 4 + 8 + 5 + 3 + 7 = 27$$

jest podzielna przez 3 *i przez* 9. *Zatem liczba* 5673 *jest podzielna przez* 3 *i przez* 9. *Rzeczywiście*

$$48537 : 3 = 16177, \quad i \quad 48537 : 9 = 5393$$

Dowód w przypadku liczb dwucyfrowych. Liczby dwucyfrowe piszemy w postaci

$$\alpha_1\alpha_0 = \alpha_1 * 10 + \alpha_0$$

Proste przekształcenie wyrażenia algebraicznego

$$\begin{aligned} \alpha_1 * 10 + \alpha_0 &= \alpha_1 * (9 + 1) + \alpha_0 \\ &= 9 * \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_0) \end{aligned}$$

zawiera składnik $9 * \alpha_1$ z czynnikiem 9, zatem ten składnik jest podzielny przez 3 i przez 9.

Skąd wnioskujemy, że:

Jeżeli suma cyfr $\alpha_1 + \alpha_0$ *jest podzielny przez* 3 *lub* 9 *to liczba m jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Prawdą jest również zdanie odwrotne:

Jeżeli liczba m jest podzielna przez 3 *lub przez* 9 *to suma jej cyfr* $\alpha_1 + \alpha_0$ *też jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Te dwa zdania wyrażamy jednym zdaniem:

Liczba m jest podzielna przez 3 *lub przez* 9 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr* $\alpha_1 + \alpha_0$ *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Ta relacja w obie strony nazywa się warunkiem koniecznym i dostatecznym. W tym przykładzie jest to warunek konieczny i dostateczny podzielności liczby m przez 3 lub przez 9.

Powtórzmy dowód cechy podzielności liczby m przez 3 lub przez 9 dla liczb trzycyfrowych.

Dowód w przypadku liczb trzycyfrowych. Liczby trzycfrowe piszemy w postaci

$$\alpha_2\alpha_1\alpha_0 = \alpha_2 * 100 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0$$

Proste przekształcenie wyrażenia algebraicznego

$$\begin{aligned} \alpha_2 * 100 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0 &= \alpha_2 * (99 + 1) + \alpha_1 * (9 + 1) + \alpha_0 \\ &= 99 * \alpha_2 + 9 * \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0) \end{aligned}$$

zawiera składnik $99 * \alpha_2 + 9 * \alpha_1$, który dzieli się przez 3 i przez 9. Zatem, jeżeli suma cyfr $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ jest podzielna przez 3 lub przez 9 to liczba m jest również podzielna przez 3 lub przez 9.

Skąd wnioskujemy, że:

Jeżeli suma cyfr $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ jest podzielny przez 3 lub 9 to liczba m jest podzielna przez 3 lub przez 9.

Prawdą jest również zdanie odwrotne:

Jeżeli liczba m jest podzielna przez 3 lub przez 9 to suma jej cyfr $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ też jest podzielna przez 3 lub przez 9.

Te dwa zdania wyrażamy jednym zdaniem:

Liczba m jest podzielna przez 3 lub przez 9 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr $\alpha_2+\alpha_1+\alpha_0$ jest podzielna przez 3 lub przez 9.

Ta relacja w obie strony nazywa się warunkiem koniecznym i dostatecznym podzielności liczby m przez 3 lub przez 9.

W przypadku ogólnym dla liczb *n-cyfrowych*, schemat dowodu cechy podzielności liczby m przez 3 lub przez 9 jest taki sam jak dla liczb dwucyfrowych i trzycyfrowych.

Zadanie 8.1 *Wiadomo, że liczba naturalna m jest podzielna przez 3 i ma dokładnie 4 dzielniki, których suma równa jest 128. Znajdź tą liczbę.*

8.1.2 Cecha podzielności liczby naturalnej przez 5

Bardzo łatwo rozpoznać liczbę m, która jest podzielna przez 5. Mianowicie, zachodzi następujące cecha podzielności:

Liczba naturalna m jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej cyfry jedności są 0 lub 5.

Przykład 8.5 *Łatwo sprawdzamy, że liczby*

$$30, 35, 40, 45, 150, 155, 2360, 2365, 9800, 9855, 9890, 9995$$

są podzielne przez 5

Dowód cechy podzielności liczby m przez 5.

Dla uproszczenia , rozpatrzymy liczbę trzycyfrową m, która ma cyfrę jedności 0 lub 5. Wtedy liczba m rozkłada się na iloczyn liczby 5 przez liczbę naturalą. Mianowicie, mamy

$$\begin{aligned} m &= \alpha_2 * 10^2 + \alpha_1 * 10 \\ &= 5 * (2 * \alpha_2 * 10 + 2 * \alpha_1) \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} m &= \alpha_2 * 10^2 + \alpha_1 * 10 + 5 \\ &= 5 * (2 * \alpha_2 * 10 + 2 * \alpha_1 + 1) \end{aligned}$$

W przypadku ogólnym liczb n-cyfrowych, które mają cyfrę jedności 0 lub 5 mamy również rozkład liczby m na iloczyn liczby 5 przez liczbę naturalną. Mianowicie

$$\begin{aligned} m &= \alpha_{n-1} * 10^{n-1} + \alpha_{n-2} * 10^{n-2} + \cdots + \alpha_1 * 10^1 \\ &= 5 * (2 * \alpha_{n-1} * 10^{n-2} + 2 * \alpha_{n-2} * 10^{n-3} + \cdots + 2 * \alpha_1) \end{aligned}$$

lub

$$m = 5 * (2 * \alpha_{n-1} * 10^{n-2} + 2 * \alpha_{n-2} * 10^{n-3} + \cdots + 2 * \alpha_2 + \alpha_1)$$

Zatem w przypadku ogólnym liczba m, która ma cyfrę jedności 0 lub 5 jest podzielna przez 5.

8.2 Dzielenie liczb przez 3 z resztą

Każda liczba naturalna m dzieli się przez 3 lub dzieli się przez 3 z resztą 1 lub z resztą 2.

Wtedy piszemy

$$\begin{aligned} &m = 3k && gdy\ \ liczba\ \ m\ \ jest\ \ podzielna\ \ przez\ 3 \\ &m = 3k+1 && gdy\ \ liczba\ \ m\ \ jest\ \ podzielna\ \ przez\ 3,\ \ reszta\ 1 \\ &m = 3k+2 && gdy\ \ liczba\ \ m\ \ jest\ \ podzielna\ \ przez\ 3,\ \ reszta\ 2 \end{aligned}$$

Przykład 8.6 *Wykonaj dzielenie z resztą*

- $33 : 3 = 11 \quad reszta \quad 0$
- $34 : 3 = 11 \quad reszta \quad 1$
- $35 : 3 = 11 \quad reszta \quad 2$

lub piszemy dzielenie w postaci ułamków

- $\frac{33}{3} = 11 \quad reszta \quad 0$
- $\frac{34}{3} = 11 + \frac{1}{3} \quad reszta \quad 1$
- $\frac{35}{3} = 11 + \frac{2}{3} \quad reszta \quad 2$

Przykład 8.7 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *równa jest* 36. *Jakie to liczby?*

Rozwiązanie.

Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 3

$$3k-3,\ 3k,\ \ 3k+3$$

Suma tych liczb

$$(3k-3)+3k+(3k+3)=9k=36$$

Skąd obliczamy

$$9k=36,\qquad k=36:9\qquad k=4.$$

Odpowiedź:

$$3k-3=3*4-3=9,$$

$$3k=3*4=12,$$

$$3k+3=3*4+1=15$$

Kolejnymi liczbami podzelnymi przez 3, których suma równa jest 36 są liczby

$$9,\quad 12\quad 15$$

Sprawdzenie:

$$9+12+15=36$$

Zadanie 8.2 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *równa jest* 72. *Jakie to liczby?*

Zadanie 8.3 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *z resztą* 1 *jest równa* 75. *Jakie to liczby?*

Zadanie 8.4 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *z resztą* 2 *jest równa* 105. *Jakie to liczby?*

8.3 Dzielenie liczb przez 5 z resztą

Każda liczba naturalna m dzieli się przez 5 lub dzieli się przez 5 z resztą 1 lub resztą 2 lub z resztą 3 lub z resztą 4.

Wtedy piszemy

$$m=5k \quad gdy \quad liczba \quad m \quad jest \quad podzielna \quad przez \ 5$$

$$m=5k+1 \quad gdy \quad liczba \quad m \quad jest \quad podzielna \quad przez \ 5, \quad reszta \ 1$$

$$m=5k+2 \quad gdy \quad liczba \quad m \quad jest \quad podzielna \quad przez \ 5, \quad reszta \ 2$$

$$m=5k+3 \quad gdy \quad liczba \quad m \quad jest \quad podzielna \quad przez \ 5, \quad reszta \ 3$$

$$m=5k+4 \quad gdy \quad liczba \quad m \quad jest \quad podzielna \quad przez \ 5, \quad reszta \ 4$$

Przykład 8.8 *Wykonaj dzielenie przez* 5 *z resztą*

- $35:5=7 \quad reszta \quad 0$
- $36:5=7 \quad reszta \quad 1$

- $37 : 5 = 7 \quad reszta \quad 2$
- $38 : 5 = 7 \quad reszta \quad 3$
- $39 : 5 = 7 \quad reszta \quad 4$

lub piszemy dzielenie w postaci ułamków

- $\frac{35}{5} = 7 \quad reszta \quad 0$
- $\frac{36}{5} = 7 + \frac{1}{5} \quad reszta \quad 1$
- $\frac{37}{5} = 7 + \frac{2}{5} \quad reszta \quad 2$
- $\frac{38}{5} = 7 + \frac{2}{5} \quad reszta \quad 3$
- $\frac{39}{5} = 7 + \frac{2}{5} \quad reszta \quad 4$

Przykład 8.9 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *równa jest* 45. *Jakie to liczby?*

Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 3
Rozwiązanie.

$$5k - 5,\ 5k,\ \ 5k + 5$$

Suma tych liczb

$$(5k - 5) + 5k + (5k + 5) = 15k = 45$$

Skąd obliczamy k

$$15k = 45, \qquad k = 45 : 15 \qquad k = 3.$$

Skąd obliczmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5, których suma równa jest 45

$$5k - 5 = 5 * 3 - 5 = 10,$$

$$5k = 5 * 3 = 15,$$

$$5k + 5 = 5 * 3 + 5 = 20$$

Kolejnymi liczbami podzelnymi przez 5, których suma równa jest 45 są liczby

$$10, \qquad 15 \qquad 20$$

Sprawdzenie:

$$10 + 15 + 20 = 45$$

Zadanie 8.5 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 1 *równa jest* 108. *Jakie to liczby?*

Rozwiązanie.
Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5 z resztą 1

$$5k+1,\ 5k+6,\ \ 5k+11$$

Suma tych liczb

$$(5k+1)+(5k+6)+(5k+11)=15k+18=108$$

Skąd obliczamy k

$$15k=90,\qquad k=90:15\qquad k=6.$$

Skąd obliczmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5, których suma równa jest 108

$$5k+1=5=5*6+1+31,$$

$$5k+6=5*6+6=36,$$

$$5k+11=5*6+11=41$$

Kolejnymi liczbami podzelnymi przez 5, których suma równa jest 45 są liczby

$$31,\qquad 36\qquad 41$$

Sprawdzenie:

$$31+36+41=108$$

Zadanie 8.6 *Suma dwóch kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 2 *jest równa* 79. *Jakie to liczby?*

Zadanie 8.7 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 3 *jest równa* 129. *Jakie to liczby?*

8.3.1 Ogólna zasada podzielności liczb naturalnych z resztą

Każda liczba naturalna m dzieli się przez liczbę naturalną n z resztą r. W wyniku dzielenia otrzymujemy całość k i resztę r.[1]
Wtedy piszemy

$$m:n=k+r:n\quad lub\quad \frac{m}{n}=k+\frac{r}{n}\quad lub\quad m=k*n+r$$

gdzie reszta $r=0,1,2,...,n-1$.
Z operacją dzielenia liczb z resztą łączymy funkcje całość z dzielenia liczby m przez liczbę n.

• Funkcje całość z dzielenia, piszemy $E[m:n]$ lub $[m:n]$.

Wartość funkcji całość z $E[m:n]$ jest równa największej liczbie całkowitej nie większej od $m:n$.

Zatem

$$E[m:n]\le m:n\qquad lub\qquad [m:n]\le m:n.$$

Na przykład niech $m=37,\quad n=5$.

[1]Wartość funkcji całość z ułamka x, piszemy $E[x]\le x$ lub $[x]\le x$, równa jest największej liczbie całkowitej nie większej od x. Po angielsku Entire of x

Największa liczba całkowita z tego dzielenia, ale nie większa od

$$37 : 5 = 7\frac{2}{5}$$

jest równa 7, piszemy

$$E[37 : 5] = E[\frac{37}{5}] = 7 \qquad lub \qquad [37 : 5] = [\frac{37}{5}] = 7.$$

Przykład 8.10 *Oblicz całość i resztę z dzielenia liczb* $m = 36,\ 37,\ 38,\ 39\ 40,\ 41$ *przez* $n = 6$.
Podaj wzór ogólny dzielenia liczby m *przez* 6 *z resztą* r.

Rozwiązanie:

$36 : 6 = 6$, *liczba* 36 *jest podzielna przez* 6, *z reszta* 0, *calosc* $k = 6,\ r = 0.$

$37 : 6 = 6$, *liczba* 37 *dzieli sie przez* 6, *z reszta* 1, *calosc* $k = 6,\ r = 1,$

$38 : 6 = 6$, *liczba* 38 *dzieli sie przez* 6, *z reszta* 2, *calosc* $k = 6,\ r = 2,$

$39 : 6 = 6$, *liczba* 37 *dzieli sie przez* 6, *z reszta* 3, *calosc* $k = 6,\ r = 3,$

$40 : 6 = 6$, *liczba* 40 *dzieli sie przez* 6, *z reszta* 4, *calosc* $k = 6,\ r = 4,$

$41 : 6 = 6$, *liczba* 31 *dzieli sie przez* 6, *z reszta* 5, *calosc* $k = 6,\ r = 5,$

Wzór ogólny dzielenia liczby naturalnej m przez 6

$$m = 6k + r,\ \ z\ \ reszta\ \ r = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Zadanie 8.8 *Stosując wzór ogólny dzielenia liczby naturalnej* m *przez* 6 *wykaż, że każda liczba pierwsza* $p > 3$ *dzieli się przez* 6 *z resztą* 1 *lub z resztą* 5 *i wtedy można napisać liczbę* p *w postaci*

$$p = 6 * k + 1,\ \ lub\ \ p = 6k - 1\ \ dla\ \ pewnej\ liczby\ naturalnej\ k$$

Napisz liczbę pierwszą $p = 7901$ *w postaci* $p = 6k - 1$

8.4 Liczby przystające. Kongruencja

Liczby całkowite a i b nazywamy przystające względem liczby naturalnej n, jeżeli ich różnica $a - b$ jest podzielna przez n.
Na przykład

13 przystaje do 3 względem 2, bo $(13 - 3) : 2 = 5$, gdy $a = 13,\ b = 3,\ n = 2.$

47 przystaje do 35 względem 6, bo $(47 - 35) : 6 = 2,$

gdy $a = 47,\ b = 35,\ n = 6.$

Liczby przytające są również nazywane liczbami kogruentnymi. Kongruencja po polsku znaczy przystawanie.
Karol Gauss (1777-1835) wprowadził oznaczenia operacji modulo.

$$a \equiv b(mod\ n)$$

Powyższy zapis rozumiemy, że różnica $a - b$ jest podzielna przez n. To znaczy

$$a - b = k * n$$

dla pewnej liczby całkowitej k.

Przykład 8.11 *Pisząc*

$$27 \equiv 13(mod\ 7)$$

rozumiemy, że różnica $27 - 13$ *jest podzielna przez 7. W tym przykładzie*

$$(27 - 13) : 7 = 2.$$

To znaczy, że $27 - 13 = 2 * 7$ *dla* $k = 2$.

Przykład 8.12 *Które kongruencje są prawdziwe?*

$7 \equiv 3(mod\ 2)$, *prawdziwa bo* $(7 - 3) : 2 = 4 : 2 = 2$

$12 \equiv 5(mod\ 4)$, *nieprawdziwa bo* $(12 - 5) = 7$, 7 *niepodzielne przez* 4

Z operacją dzielenia z resztą łączymy operacje modulo $r \equiv m(mod\ n)$

• Mianowicie, resztę z dzielenia liczby m przez lliczbę n, piszemy

$$r = m(mod\ n).$$

Wynik operacji modulo jest równa różnicy

$$r = (m : n - E[m : n]) * n$$

lub

$$r = (m : n - [m : n]) * n.$$

Na przykład niech

$$m = 37, \quad n = 5.$$

Wtedy obliczamy wartość funkcji modulo, reszte z tego dzielenia

$$r = (37 : 5 - E[37 : 5]) * 5 = (7\frac{2}{5} - 7) * 5 = 2$$

lub

$$r = (37 : 5 - [37 : 5]) * 5 = (7\frac{2}{5} - 7) * 5 = 2.$$

8.4.1 Dzielenie modulo

Wynik dzielenia modulo liczby całkowitej a przez liczbę naturalą n równy jest reszcie z dzielenia liczby a przez liczbę n. Zatem, operacja modulo określona jest na zbiorze liczb całkowitych.

Na przykład

$$r = 25(mod\ 15) = 10 \quad bo \quad 25 : 15 = 1 + reszta \quad 10$$

$$r = 37(mod\ 12) = 1 \quad bo \quad 37 : 12 = 3 + reszta \quad 1$$

Dokładny wylnik

$$\frac{25}{15} = 1 + \frac{10}{15}$$
$$\frac{37}{12} = 3 + \frac{1}{12}$$

Wtedy piszemy

$$r = a(mod\ n), \quad 25(mod 15) = 10, \quad gdy \quad a = 25, \quad n = 15, \quad reszta \quad r = 10$$

$$r = a(mod\ n), \quad 37(mod 12) = 1, \quad gdy \quad a = 37, \quad n = 12, \quad reszta \quad r = 1$$

Przykład 8.13 *Oblicz* $47(mod\ 5)$

Obliczamy

$$47 : 5 = 9 + reszta \quad 2,$$

Odpowiedź:

$$47(mod\ 5) = 2$$

Przykład 8.14 *Oblicz* $123(mod\ 7)$

Obliczamy

$$123 : 7 = 17 + reszta \quad 4,$$

Odpowiedź:

$$123(mod\ 7) = 4$$

8.4.2 Własności operacji modulo

Relacja $\equiv$ kongruencji, to znaczy, że relacja przystawania liczb całkowitych ma podobne własności jak zwykła relacja równości $=$.
Własności kongruencji:

1. **Własność symetrii**

   $a \equiv b(mod\ n) \quad to \quad b \equiv a(mod\ n)$

   Przykład 8.15 *Rozpatrzmy kongruencje*

   $$15 \equiv 3(mod\ 4) \qquad i \quad 3 \equiv 15(mod\ 4)$$

   $$a = 15, \quad b = 3$$

   Liczby $a = 15$ i $b = 3$ są przystające względem liczby naturalnej $n = 4$ w obu przypadkach, gdyż

   $$(15 - 3) : 4 = 3 \qquad i \quad (3 - 15) : 4 = -3$$

2. **Operacja przechodnia**

   Jeżeli liczby a i b oraz liczby b i c są przystające względem liczby n, to znaczy, że prawdziwe są kongruencje

   $$a \equiv b((mod\ n)\ \ i\ \ b \equiv c(mod\ n)$$

   to liczby a i c też są przystające względem liczby n, to znaczy

   $$a \equiv c(mod\ n)$$

   Przykład 8.16 *Rozpatrzmy dwie kongruencje*

   $$20 \equiv 12(mod\ 4) \qquad i \quad 12 \equiv 8(mod\ 4),$$

   $$a = 20, \quad b = 12, \quad c = 8, \quad n = 4.$$

   Liczby $a = 20$ i $c = 8$ też są przystające względem liczby 4, gdyż

   $$20 \equiv 8(mod\ 4)$$

   ponieważ różnica

   $$(20 - 8) : 4 = 3$$

3. **Dodawanie i mnożenie kongruencji**
   Jeżeli prawdziwe są kongruencje

   $$a \equiv b(mod\ n) \quad i \quad c \equiv d(mod\ n)$$

   to suma stron tych kongruencji

   $$a + c \equiv b + d(\text{mod } n)$$

   oraz iloczyn stron tych kongruencji

   $$a \cdot c \equiv b \cdot d(\text{mod } n)$$

   Przykład 8.17 *Rozpatrzmy dwie kongruencje*

   $$15 \equiv 3(mod\ 4) \qquad i \quad 3 \equiv 15(mod\ 4)$$

   $$a = 15, \quad b = 3 \quad c = 3, \quad d = 15, \quad n = 4$$

   Liczby 15 i 3 są przystają względem liczby naturalnej $n = 4$, gdyż różnice

   $$(15 - 3) : 4 = 3 \qquad i \quad (3 - 15) : 4 = -3$$

   są podzielne przez 4.

4. **Mnożenie kongruencji przez siebie. Potęga Kongruencji.** Mnożąc stronami kongruencję

   $$a \equiv b(mod\ n)\}$$

   przez siebie, otrzymamy

   $$a^2 \equiv b^2(\text{mod } n), \quad a^3 \equiv b^3(mod\ n)\},\ \ldots, a^k \equiv b^k(mod\ n)\}$$

   dla każdego naturalnego $k = 1, 2, 3, ...$;

Przykład 8.18 *Rozpatrzmy kongruencje*

$$9 \equiv 3(mod\ 2)$$

$$a = 9, \quad b = 3, \quad n = 2.$$

Mnożąc tą kongruencje stronami, otrzymamy

$$9^2 \equiv 3^2(mod\ 2), \quad 9^3 \equiv 3^3(mod\ 2), ..., 9^k \equiv 3^k(mod\ 2)$$

lub

$$81 \equiv 9(mod\ 2), \quad 729 \equiv 27(mod\ 2),\ ...\ , 9^k \equiv 3^k(mod\ 2)$$

Sprawdzamy:

$$(81-9):2 = 36, \qquad (729-27):2 = 702:2 = 351, ..., (9^k - 3^k):2 =):2$$

Różnica $9^k - 3^k$ jest również podzielna przez 2. Ponieważ cyfry jedności liczb 9^k i 3^k są nieparzyste. Mianowicie cyfry jedności liczby 9^k to

$$1, 9, 1, 9, 1, 9, ...;$$

i cyfry jedności liczby 3^k to

$$9, 7, 1, 9, 7, 1, ...;$$

Różnica liczba nieparzystych jest liczbą parzystą.
Zatem liczba $9^k - 3^k$ jest podzielna przez 2 dla każdej liczby naturalnej $k = 1, 2, 3, ...$;
Skąd wynika, że liczby 9^k i 3^k są przystające modulo 2.

Przykład 8.19 *Liczba*

$$43^{125} - 33^{125}$$

jest podzielna przez 10.

Podnosząc stronami kongruencje

$$43 \equiv 33(mod\ 10)$$

do potęgi 125, otrzymamy kongruencje

$$43^{125} \equiv 33^{125}(mod\ 10)$$

Liczba 43 przystaje do liczby 33 modulo 10, gdyż

$$(43-33):10 = 1$$

Dlatego liczba 43^{125} przestaje do liczby 33^{125} modulo 10. Zatem różnica

$$43^{125} - 33^{125}$$

jest podzielna przez 10. Zastosowanie kongruencji do sprawdzania podzielności liczb wskażemy w następującym przykładzie

Przykład 8.20 *Stosując własność mnożenia stronami kongruencji, potęgowania stronami kongruencji, udowodnij, że liczba* $7^{246} + 1$ *jest podzielna przez* 10.

Rozwiązanie. Zauważmy, że liczba $7^2+1 = 50$ jest podzielna przez 10. To znaczy, że liczba 49 przystaje do liczby -1 modulo 10. Zatem mamy

$$49 \equiv -1(mod\ 10)$$

Podnosząc stronami tą kongruencje do potęgi 123, otrzymamy

$$49^{123} \equiv (-1)^{123}(mod\ 10), \qquad 7^{246} \equiv (-1)^{123}(mod\ 10)$$

Skąd, wynika kongruencja

$$7^{246} \equiv -1(mod\ 10)$$

która oznacza, że liczba $7^{246} + 1$ jest podzielna przez 10.

8.4.3 Rozwiązywanie kongruencji liniowych

Ogólna postać kongruencji liniowej

$$a * x \equiv b(mod\ n)$$

w której w spółczynniki a, b są liczbami całkowitymi, natomiast n jest liczbą naturalną.
Rozwiązać kongruencję liniową znaczy wyznaczyć wszystkie liczby całkowite, które podstawione na x spełniają kongruencje, to znaczy, że mamy znaleźć wszystkie wartości całkowite x dla których liczba $a * x$ przystaje do liczby b modulo n.
W pierwszej kolejności powstaje pytanie, podobnie jak w przypadku innych równań, ile rozwiązań ma kongruencja liniowa? Z góry można spodziewać się że kongruencja liniowa może mieć

- jedno rozwiązanie, to znaczy istnieje tylko jedna liczba całkowita x_0 przystająca do liczby b modulo n taka, że
$$a * x_0 \equiv b(mod\ n)$$
- więcej niż jedno rozwiązanie, to znaczy, że istnieje skończona lub nawet nieskończona ilość liczb całkowitych $x_1, x_2, ..., x_k, ...$; które są przystające do liczby b modulo n. To znaczy
$$a * x_k \equiv b(mod\ n), \qquad k = 1, 2, 3, ...;$$
- kongruencja nie ma rozwiązań.

Istnienie rozwiązania kongruencji liniowej wynika z następującego warunku koniecznego i wystarczającego:

Warunek konieczny i wystarczający
Kongruencja liniowa

$$a * x \equiv b(mod\ n)$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy największy wspólny dzielnik $NWD(a, n)$ liczb a i n jest dzielnikiem liczby b, to znaczy $NWD(a, b)|n$.
Po przeczytaniu powyższego wstępu o kongruencjach liniowych należy rozwiązać kilka kongruencji, ażeby poznać sposoby ich rozwiązywania.

Przykład 8.21 *Rozwiąż kongruencje*

$$2 * x \equiv 3(mod\ 2)$$

Sprawdzamy warunek konieczny i wystarczający istnienia rozwiązania tej kongruencji.
Największy wspólny dzielnik

$$NWD(a,b) = NWD(2,2) = 2$$

nie dzieli współczynnika

$$b = 3, \quad 2 \nmid 3.$$

Zatem nie istnieje rozwiązanie tej kongruencji.

Przykład 8.22 *Rozwiąż kongruencje*

$$3 * x \equiv 6 (mod\ 9)$$

Sprawdzamy warunek konieczny i wystarczający istnienia rozwiązania tej kongruencji.
Największy wspólny dzielnik

$$NWD(a,b) = NWD(3,9) = 3$$

dzieli współczynnik

$$b = 6, \quad 3|6, \quad 6 : 3 = 2.$$

Zatem istnieje rozwiązanie tej kongruencji.
Z definicji kongruencji mamy równanie

$$3 * x - 6 = 9 * k,$$

dla wszystkich wartości całkowitych $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

Skąd obliczamy rozwiązanie

$$3 * x = 9 * k + 6, \quad x_k = 3 * k + 2, \quad dla \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

Sprawdzenie:

Podstwiając rozwiązanie

$$x_k = 3 * k + 2, \quad dla \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

do kongruencji

$$3 * x \equiv 6 (mod\ 9)$$

otrzymamy

$$3 * (3 * k + 2) \equiv 6 (mod\ 9),$$

Skąd wynika tożsamość

$$(9 * k + 6 - 6) : 9 = 9 * k, \quad 9 * k = 9 * k$$

dla każdej całkowitej wartości $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

8.5 Zadania

Zadanie 8.9 *Udowodnij, że liczba naturalna dwuzyfrowa*

$$m = \alpha * 10_1 + \alpha_0$$

jest podzielna przez 7 *wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie algebraiczne*

$$3\alpha_1 + \alpha_0$$

jest podzielne przez 7.

Zadanie 8.10 *Udowodnij, że liczba naturalna trzycyfrowa*

$$m = \alpha_2 10^2 + \alpha_1 10 + \alpha_0$$

jest podzielna przez 7 *wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie algebraiczne*

$$3^2\alpha_2 + 3\alpha_1 + \alpha_0$$

jest podzielne przez 7.

Zadanie 8.11 *Ogóllnie udowodnij, że liczba naturalna (n+1)-cyfrowa*

$$m = \alpha_n 10^n + \alpha_{n-1} 10^{n-1} + ... + \alpha_2 10^2 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0$$

jest podzielna przez 7 *wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie algebraiczne*

$$3^n\alpha_n + 3^{n-1}\alpha_{n-1} + ... + 3^2\alpha_2 + 3\alpha_1 + \alpha_0$$

jest podzielne przez 7.

Zadanie 8.12 *Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, żeby liczba czterocyfroawa*

$$m = \alpha_3 10^3 + \alpha_2 10^2 + \alpha_1 10 + \alpha_0$$

była podzielna przez 11.

Zadanie 8.13 *Wykonaj dzielenie z resztą*

- 52 : 3
- 331 : 3
- 830 : 3

Zadanie 8.14 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *z resztą* 1 *równa jest* 376. *Jakie to liczby?*

Zadanie 8.15 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 2 *równa jest* 167. *Jakie to liczby?*

Zadanie 8.16 *Oblicz całość i resztę z dzielenia liczb*

$$m = 136,\ 237,\ 3381$$

przez $n = 7$.

Podaj wzór ogólny dzielenia liczby m *przez* 7 *z resztą* r.

Zadanie 8.17 *Oblicz*

(i) $8 + 10(mod\ 4)$

(ii) $2 + 5(mod\ 7)$

(iii) $12(mod\ 7) + 13(mod\ 8)$

Zadanie 8.18 *Dodaj, odejmij i pomnóż stronami kongruencje. Sprawdź wyniki tych operacji.*

$$18 \equiv 10(mod\ 4)$$

oraz

$$25 \equiv 17(mod\ 4)$$

Zadanie 8.19 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb*

$$a = 105 \quad i \quad b = 91.$$

Zadanie 8.20 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb*

$$a = 1995 \quad i \quad b = 1190$$

Chapter 9

Ogólna zasada tworzenia systemów liczbowych pozycyjnych

Ogólna forma systemów pozycyjnych liczbowych ma postać wielomianu

$$\alpha_{n-1}\rho^{n-1} + \alpha_{n-2}\rho^{n-2} + \cdots + \alpha_2\rho^2 + \alpha_1\rho + \alpha_0, \tag{9.1}$$

gdzie liczbę naturalną $\rho \geq 2$ nazywamy podstawą systemu liczbowego. Natomiast współczynniki $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, ..., \alpha_1, \alpha_0$ nazywamy cyframi systemu liczbowego.
Cyfry systemu liczbowego o podstawie ρ są to liczby jednocyfrowe:

$$0, 1, 2, 3, ..., \rho - 1$$

z których tworzone są liczby systemu. Ilość cyfr zależy od podstawy ρ i jest równa ρ.
Samą liczbę x piszemy umownie jako następujący ciąg cyfr

$$x = (\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0)_\rho$$

W przypadku systemu dziesiętnego, który jest powszechnie używany, nawias z indeksem ρ opuszczamy

$$(\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0)_\rho.$$

Wtedy liczbę dziesiętną piszemy bez nawiasu

$$x = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0$$

jako ciąg współczynników wielomianu (9.1).

9.1 Przykłady zapisu liczb w różnych systemach

Przykład 9.1 *W systemie dziesiętnym $\rho = 10$. Liczbę*

$$x = 2 * 10 + 4 = 24$$

piszemy bez nawiasu $x = 24$

Przykład 9.2 *W systemie binarnym $\rho = 2$. Tą samą liczbę*

$$x = 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = (11000)_2 = 24$$

piszemy z nawiasem $x = (11000)_2$

Przykład 9.3 *W systemie oktalnym $\rho = 8$. Tą samą liczbę*

$$x = 3 * 8 + 0 = (30)_8 = 24$$

piszemy z nawiasem $x = (30)_8$

9.2 System dziesiętny. Decymalny

W systemie dziesiętnym podstawa $\rho = 10$. Wtedy dla $\rho = 10$ wielomian jest wyrażeniem algebraicznym

$$a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \cdots + a_1 10 + a_0 = a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0$$

współczynniki tego wyrażenia są cyframi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$, gdzie
α_0 oznacza ilość jedności liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^0 = 10^0$.
α_1 oznacza ilość dziesiątek liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^1 = 10$.
α_2 oznacza ilość setek liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^2 = 10^2$.
α_3 oznacza ilość tysięcy liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^3 = 10^3$.
.....
α_{n-1} oznacza współczynnik przy potędze $\rho^{n-1} = 10^{n-1}$.
Najbardziej znacząca cyfra jest zawsze większa lub równa 1, $\alpha_{n-1} \geq 1$.
Cyfry systemu dziesiętnego

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

są jednocześnie liczbami jednocyfrowymi
Liczby dwucyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_1 * 10 + a_0 = a_1a_0$$

gdzie cyfrą dziesiątek jest współczynnik a_1, cyfrą jedności jest współczynnik a_0

Przykład 9.4 *Liczba* $x = 57$

*5*10+7= 57*

Tutaj cyfra dziesiątek $a_1 = 5$, *cyfra jedności* $a_0 = 7$.

Liczby trzycyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_2 * 100 + a_1 * 10 + a_0 = a_2a_1a_0$$

lub w zapisie potęgi podstawy 10, piszemy

$$100 = 10 * 10 = 10^2, \;\; 10^1 = 10, \;\; 10^0 = 1$$

wtedy liczba trzycyfrowa ma ogólną postać

$$a_2 * 10^2 + a_1 * 10^1 + a_0 * 10^0 = a_2a_1a_0$$

Przykład 9.5 $x = 348$

$$3 * 10^2 + 4 * 10^1 + 8 * 10^0 = 348$$

gdzie cyfra setek $a_2 = 3$, *cyfra dziesiątek* $a_1 = 4$, *cyfra jedności* $a_0 = 8$.

Ogólnie liczby n-cyfrowe w pozycyjnym systemie dziesiętnym piszemy jako współczynniki wyrażenia algebraicznego

$$a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + a_{n-3}10^{n-3} + \cdots + a_1 10 + a_0 = a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0$$

gdzie potęga podstawy 10

$$\begin{aligned}
10^1 &= \underbrace{10}_{1} \\
10^2 &= \underbrace{10 * 10}_{2} \\
10^3 &= \underbrace{10 * 10 * 10}_{3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
10^{n-3} &= \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n-3} \\
10^{n-2} &= \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n-2} \\
10^{n-1} &= \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n-1}
\end{aligned}$$

oznacza liczbę 10 pomnożoną przez siebie 1 raz lub 2 razy lub 3 razy itd...$n-3$ razy $n-2$ razy i $n-1$ razy. Liczba 10 pomnożona przez siebie zero razy $10^0 = 1$.

Przykład 9.6 *Niech* $n = 4$, *wtedy liczbę czterocyfrowa x=7831.*
piszemy w postaci wyrażenia arytmetycznego

$$7 * 1000 + 8 * 100 + 3 * 10 + 1 = 7831$$

lub w symbolach potegi $1000 = 10 * 10 * 10 = 10^3$, $100 = 10 * 10 = 10^2$, $10 = 10^1$, $10^0 = 1$

$$7 * 10^3 + 8 * 10^2 + 3 * 10^1 + 1 = 7831$$

gdzie cyfra tysięcy $a_3 = 7$, *cyfra setek* $a_2 = 8$, *cyfra dziesiątek* $a_1 = 3$, *cyfra jedności* $a_0 = 1$.

9.2.1 Operacje arytmetyczne w systemie dziesiętnym

Operacje arytmetyczne w systemie dziesiętnym wykonujemy w kolejności:
mnożenie, dzielenie, dodawanie i odejmowanie.
Ten porządek wykonywania operacji arytmetycznych może być zmieniony przez nawiasy.

Przykład 9.7 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*
W wyrażeniach arytmetycznych z nawiasami w pierwszej kolejności obliczamy watość wyrażeń w nawiasach. W tym przykładzie w pierszej kolejności wykonujemy dodawanie i odejowanie w nawiasach, a następnie mnożenie i dzielenie

$$\begin{aligned}
\underbrace{(12+13)}_{25} * 4 - \underbrace{(15-6)}_{9} : 3 &= 25 * 4 - 9 : 3 \\
&= 100 - 3 = 97
\end{aligned}$$

9.2.2 Dodawanie pisemne liczb naturalnych

Tabliczka dodawania liczb systemie pozycyjnym dziesiętnym

	Dodawanie				dziesiętne					
+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Dodawanie dziesiętne pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 9.8 *Wykonaj dodawanie liczb dziesiętnych* 25 *i* 13

Wykonujemy pisemne dodawanie $25 + 13$, stosując tabliczkę dziesiętnego dodawania.

$$\begin{array}{rr} & 25 \\ + & 13 \\ \hline & 38 \end{array}$$

Przykład 9.9 *Wykonaj dodawanie liczb dziesiętnych* 89 *i* 56

Wykonujemy pisemne dodawanie $25 + 13$, stosując tabliczkę dziesiętnego dodawania.

$$\begin{array}{rr} & 89 \\ + & 56 \\ \hline & 145 \end{array}$$

9.2.3 Odejmowanie pisemne liczb całkowitych

Tabliczka odejmowania w systemie pozycyjnym dziesiętnym

	Odejmowanie				dziesiętne					
-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Odejmowanie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 9.10 *Wykonaj odejmowanie liczb dziesiętnych* 29 *i* 18

Wykonujemy pisemne oktalne odejmowanie $29 - 18$, stosując tabliczkę odejmowania.

$$\begin{array}{rr} & 29 \\ - & 18 \\ \hline & 11 \end{array}$$

Przykład 9.11 *Wykonaj odejmowanie liczb dziesiętnych* 629 *i* 354

Wykonujemy pisemne oktalne odejmowanie $629 - 354$, stosując tabliczkę odejmowania.

$$\begin{array}{rr} & 629 \\ - & 354 \\ \hline & 275 \end{array}$$

9.2.4 Mnożenie pisemne liczb naturalnych

Tabliczka mnożenia w systemie pozycyjnym dziesiętnym

	Mnożenie				dziesiętne					
*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Mnożenie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 9.12 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* 49 *i* 15

Wykonujemy pisemne binarne mnożenie $49 * 15$, stosując tabliczkę mnożenia i dodawania.

$$\begin{array}{r} 49 \\ * \; 15 \\ \hline 245 \\ 49 \\ \hline 735 \end{array}$$

Przykład 9.13 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* 345 *i* 123

Wykonujemy pisemne mnożenie $345 * 123$, stosując tabliczkę mnożenia i dodawania.

$$\begin{array}{r} 345 \\ *\ 123 \\ \hline 1035 \\ 690 \\ 345 \\ \hline 42435 \end{array}$$

9.2.5 Dzielenie pisemne liczb naturalnych

Dzielenie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 9.14 *Wykonaj dzielenie pisemne liczb dziesiętnych* 345 *podziel przez* 5

Wykonujemy pisemne dzielenie $345 : 5$.

$$\begin{array}{r} 69 \\ \hline 345 : 5 \\ -30 \\ \hline 45 \\ 45 \\ \hline = \end{array}$$

Przykład 9.15 *Wykonaj pisemne dzielenie liczb dziesiętnych* 1659 *przez* 21

Wykonujemy pisemne dzielenie $1659 : 21$.

$$\begin{array}{r} 79 \\ \hline 1659 : 21 \\ -147 \\ \hline 189 \\ 189 \\ \hline = \end{array}$$

9.3 Własności liczb parzystych i nieparzystych dziesiętnych

9.3.1 Liczby parzyste dziesiętne.

Własności liczb parzystych:

1. Liczby parzyste mają cyfry jedności 0 lub 2 lub 4 lub 6 lub 8.
   Na przkład liczby

   $$120,\ 132,\ 134,\ 156,\ 178$$

   mają odpowiednio cyfry jedności

   $$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$$

2. Liczby parzyste są podzielne przez 2, zatem mają ogólną postać

$$n = 2 * k, \quad \text{dla } \; k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Na przykład

$$\begin{array}{ll} k = 0, & n = 2 * 0 = 0, \\ k = 1, & n = 2 * 1 = 2, \\ k = 2, & n = 2 * 2 = 4, \\ .... & ..... \\ k = 8, & n = 2 * 8 = 16, \\ k = 26, & n = 2 * 26 = 52. \end{array}$$

3. Suma, różnica i iloczyn liczb parzystych jest liczbą parzystą
Na przykład:

$$a = 8, \quad b = 6,$$

$$a + b = 8 + 6 = 14, \quad a - b = 8 - 6 = 2, \quad a * b = 8 * 6 = 48$$

9.3.2 Liczby nieparzyste dziesiętne

Własności liczb nieparzystych:

1. Liczby nieparzyste mają cyfry jedności 1 lub 3 lub 5 lub 7 lub 9.
Na przkład liczby

$$121,\ 133,\ 135,\ 157,\ 179$$

mają odpowiednio cyfry jedności

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$$

2. Liczby nieparzyste mają ogólną postać

$$n = 2 * k + 1, \quad \text{lub } \; n = 2 * k - 1, \quad \text{dla } \; k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Na przykład

$$\begin{array}{llll} k = 0, & n = 2 * 0 + 1 = 1, & lub & n = 2 * 0 - 1 = -1 \\ k = 1, & n = 2 * 1 + 1 = 3, & lub & n = 2 * 1 - 1 = 1 \\ k = 2, & n = 2 * 2 + 1 = 5, & lub & n = 2 * 2 - 1 = 3 \\ .... & ..... & & \\ k = 8, & n = 2 * 8 + 1 = 17, & lub & n = 2 * 8 - 1 = 15 \\ k = 26, & n = 2 * 26 + 1 = 53 & lub & n = 2 * 26 - 1 = 51 \\ . & & & \end{array}$$

3. Iloczyn liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą
Na przykład:

$$5 * 7 = 35, \quad 7 * 11 = 77, \quad 9 * 15 = 105$$

4. Suma lub różnica dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą. Podaj przykład.

5. Natomiast suma lub różnica liczby nieparzystej i liczby parzystej jest liczbą nieparzysta. Podaj przykład.

9.3.3 Przykłady

Zadanie 9.1 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby nieparzyste to

$$2n+1, \quad 2n+3, \quad 2n+5.$$

Ich suma

$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5) = 6n+9 = 51$$

Obliczamy n:

$$6n+9 = 51, \quad 6n = 42, \quad n = 42:6 = 7$$

Obliczmy trzy kolejne liczby parzyste

$$2n+1 = 2*7+1 = 15, \quad 2n+3 = 2*7+3 = 17, \quad 2n+5 = 2*7+5 = 19.$$

Sprawdzenie:

$$15+17+19 = 51$$

Zadanie 9.2 *Suma pięciu kolejnych liczb parzystych równa jest 200. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby parzyste to

$$2n-4, \quad 2n-2, \quad 2n, \quad 2n+2, \quad 2n+4.$$

Ich suma

$$(2n-4)+(2n-2)+2n+(2n+2+(2n+4) = 10n = 200$$

Obliczamy n:

$$10n = 200, \quad n = 200:10 = 20$$

Obliczmy pięć kolejnych liczb parzystych

$$2n-4 = 2*20-4 = 36, \quad 2n-2 = 2*20-2 = 38, \quad 2n = 2*20 = 40,$$
$$2n+2 = 2*20+2 = 42, \quad 2n+4 = 2*20+4 = 44.$$

Sprawdzenie:

$$36+38+40+42+44 = 200.$$

Zadanie 9.3 *Suma czterech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 160. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne cztery liczby nieparzyste to

$$2n-3, \quad 2n-1, \quad 2n+1 \quad 2n+3.$$

Ich suma

$$(2n-3)+(2n-3)+(2n+1)+(2n+3) = 8n = 160$$

Obliczamy n:

$$8n = 160, \quad \text{to} \quad n = 160:8 = 20$$

Obliczmy cztery kolejne liczby nieparzyste

$$2n-3 = 2*20-3 = 37, \quad 2n-1 = 2*20-1 = 39,$$
$$2n+1 = 2*20+1 = 41, \quad 2n+3 = 2*20+3 = 43.$$

Sprawdzenie:

$$37+39+41+43 = 160$$

9.3.4 Zadania

Zadanie 9.4 *Wykonaj dodawanie pisemne liczb dziesiętnych* 1659 *i* 421

Zadanie 9.5 *Wykonaj odejmowanie pisemne liczb* $1659-421$

Zadanie 9.6 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* $345*21$

Zadanie 9.7 *Wykonaj dzielenie pisemne liczb dziesiętnych* 1722 *przez* 21

Zadanie 9.8 *Dopisz do liczby czterocyfrowej* 3058 *cyfrę* 7 *na pozycji pomiędzy jej cyfry albo na początku albo na końcu, żeby otrzymać najmniejszą liczbę pięciocyfrową.*

Zadanie 9.9 *Ile róznych liczb dwucyfrowych parzystych można utworzyć z cyfr 1,2,3,4,5*

Zadanie 9.10 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. znajdź te liczby.*

Zadanie 9.11 *Udowodnij, ze wyrażenie algebraiczne*

$$a^2+(a+2)(a+2)+(a+4)(a+4)+1$$

jest podzielne przez 12 dla każdej liczby naturalnej i nieparzystej a.

Zadanie 9.12 *Pomiędzy cyfry liczby 18519 wstaw cyfre 2, żeby otrzymać*

(a) liczbę największą

(b) liczbę najmiejszą

Zadanie 9.13 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 36. znajdź te liczby.*

Zadanie 9.14 *Suma czterech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 180. znajdź te liczby.*

Zadanie 9.15 *Suma pięciu kolejnych liczb parzystych równa jest 180. znajdź te liczby.*

Zadanie 9.16 *Oblicz sumę*

$$S_{15} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15$$

używając jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Zadanie 9.17 *Oblicz sumę*

$$S_{16} = 2+4+6+8+10+12+14+16$$

używając jednei operacji mnożenia.

Zadanie 9.18 *Oblicz sumę*

$$S_{21} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$$

używając jednej opercji mnożenia.

Zadanie 9.19 .

(a) Oblicz sumę 20-stu wyrazów ciągu

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60.$$

(b) Podaj wzór ogólny na sumę n-wyrazów ciągu

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \cdots, 3n.$$

(c) Stosując ten wzór oblicz sumę 15-stu wyrazów tego ciągu.

Zadanie 9.20 *Udowodnij, że wyrażenie algebraiczne*

$$(a + 1)(a + 1) + 4$$

jest podzielne przez 4 *dla każdej liczby parzystej a.*

9.4 System dwójkowy. Binarny

W systemie pozycyjnym binarnym podstawa $\rho = 2$ i odpowiedni wielomian jest wyrażeniem algebraicznym

$$a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \cdots + a_1 2 + a_0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0)_2$$

Mamy wtedy tylko dwie cyfry $0, 1$. To znaczy, że współczynniki

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$$

przyjmują wartości 0 lub 1.
Na przykład, liczba binarna czterocyfrowa

$$x = \alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0 = 1010$$

ma
ilość jedności $2^0 = 1,\ \alpha_0 = 0,$
ilość dwójek $2^1,\ \alpha_1 = 1,$
ilość kwadratów dwójek $2^2,\ \alpha_2 = 1$
ilość kubicznych dwójek $2^3,\ \alpha_3 = 1.$
Zauważmy, że w systemie dziesiętnym podstawą jest liczba 10. W systemie dziesiętnym piszemy liczby używając 10-ciu cyfr

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Natomiast w systemie binarnym podstawą jest liczba 2. W binarnym systemie są dwie cyfry

$$0, 1,$$

które są jednocześnie liczbami jednocyfowymi binarnymi.
Liczby binarne dwucyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_1 * 2 + a_0 = (a_1 a_0)_2$$

gdzie cyfrą dwójek jest współczynnik a_1, cyfrą jedności jest współczynnik a_0

Przykład 9.16 *Liczba binarna* $x = (11)_2$

$$1 * 2 + 1 = (11)_2.$$

Tytaj cyfrą dwójek jest współczynnik $a_1 = 1$*, cyfra jedności współczynnik* $a_0 = 1$*. Wartość tej liczby binarnej w zapisie dziesiętnym jest równa* 3*.*

Liczby binarne trzycyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_2 * 2^2 + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0 = (a_2 a_1 a_0)_2$$

gdzie kolejne potęgi dwójki

$$2 * 2 = 2^2, \;\; 2^1 = 2, \;\; 2^0 = 1.$$

Przykład 9.17 *Na przykład liczbę binarną* $x = (101)_2$ *w ogólnym zapisie piszemy*

$$a_2 * 2^2 + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0 = (a_2 a_1 a_0)_2,$$

$$1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = (101)_2,$$

gdzie cyfra binarna $a_2 = 1$ *jest współczynnikiem przy* 2^2*,*
cyfra binarna $a_1 = 0$ *jest współczynnikiem przy* 2*,*
cyfra binarna jedności $a_0 = 1$*.*
Wartość tej liczby binarnej

$$(101)_2 = 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 5$$

w zapisie dziesiętnym jest równa 5*.*

Ogólnie liczby n-cyfrowe w pozycyjnym systemie binarnym piszemy jako współczynniki wyrażenia algebraicznego

$$a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + a_{n-3}2^{n-3} + \cdots + a_1 2 + a_0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1 a_0)_2$$

gdzie kolejne potęgi podstawy 2 są:

$$2^1 = \underbrace{2}_{1}$$
$$2^2 = \underbrace{2 * 2}_{2}$$
$$2^3 = \underbrace{2 * 2 * 2}_{3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2^{n-3} = \underbrace{2 * 2 * 2 * \ldots * 2}_{n-3}$$
$$2^{n-2} = \underbrace{2 * 2 * 2 * \ldots * 2}_{n-2}$$
$$2^{n-1} = \underbrace{2 * 2 * 2 * \ldots * 2}_{n-1}$$

Tutaj 2^1, 2^2, 2^3 ... 2^{n-1} oznacza liczbę 2 pomnożoną przez siebie 1 raz lub 2 razy lub 3 razy itd...$n-3$ razy $n-2$ razy i $n-1$ razy. Liczba 2 pomnożona przez siebie zero razy $2^0 = 1$.

Przykład 9.18 *Niech $n = 5$, wtedy liczbę binarną pięciocyfrową $x = (10101)_2$.*
piszemy w postaci wyrażenia arytmetycznego

$$1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = (10001)_2$$

gdzie wpsółczynnik przy 2^4 jest równy $a_4 = 1$,
wpsółczynnik przy 2^3 jest równy $a_3 = 0$,
wpsółczynnik przy 2^2 jest równy $a_2 = 0$,
wpsółczynnik przy 2^1 jest równy $a_1 = 0$,
i wpsółczynnik jedności binarnych, przy 2^0 jest równy $a_0 = 1$.

9.4.1 Przeliczanie liczb dziesiętnym na liczby binarnym

Każdą liczbę dziesiętną można przeliczyć na liczbę binarną. To przeliczanie jest proste. Mianowicie, dzielimy liczbę dziesiętną przez 2 i piszemy resztę. Następnie część całkowitą tego dzielenia dzielimy przez 2 i piszemy resztę. Dalej kontynuujemy dzielenie części całkowitych przez 2 zapisując ich reszty tak długo aż w wyniku dzielenia przez 2 otrzymamy część całkowitą równą 0.
Liczbę binarną otrzymujemy pisząc reszty z dzielenia w kolejności zaczynają od ostatniej reszty i kończąc na pierwszej reszcie jako cyfrze binarnej jedności. Zobaczmy przeliczanie liczb dziesiętnych na binarne na przykładach.

Przykład 9.19 *Przelicz liczbę dziesiętną $x = 9$ na liczbę binarną*
Wykonujemy dzielenia liczby dziesiętnej $x = 9$ przez 2

$$\begin{aligned}
&\frac{9}{2} = 4 + \tfrac{1}{2} \quad \textit{reszta } r_0 = 1 \quad \textit{bo} \quad 9 = 2 * 4 + 1\\
&\frac{4}{2} = 2 \qquad \textit{reszta } r_1 = 0 \quad \textit{bo} \quad 4 = 2 * 2 + 0\\
&\frac{2}{2} = 1 \qquad \textit{reszta } r_2 = 0 \quad \textit{bo} \quad 2 = 2 * 1 + 0\\
&\frac{1}{2} = 0 + \tfrac{1}{2} \quad \textit{reszta } r_3 = 1 \quad \textit{bo} \quad 1 = 2 * 0 + 1
\end{aligned}$$

Pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej otrzymamy liczbę binarną

$$(r_3 r_2 r_1 r_0)_2 = (1001)_2$$

Powtórzmy kolejne dzielenia liczby 9 przez 2 według innego stosowanego schematu

Liczba $x/2$		*Reszta z dzielenia przez 2*
======	=	================
$9/2 = 4$	|	1
$4/2 = 2$	|	0
$2/2 = 1$	|	0
$1/2 = 0$	|	1

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$(1001)_2$$

Sprawdzenie:

$$(1001)_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 8 + 1 = 9.$$

Przykład 9.20 *Przelicz liczbę dziesiętną $x = 15$ na liczbę binarną*

Wykonujemy dzielenia liczby dziesiętnej $x = 15$ przez 2

$$\begin{aligned}
&\frac{15}{2} = 7 + \tfrac{1}{2} \quad reszta\ r_0 = 1 \quad bo \quad 15 = 2 * 7 + 1\\
&\frac{7}{2} = 3 \qquad\ reszta\ r_1 = 1 \quad bo \quad 7 = 2 * 3 + 1\\
&\frac{3}{2} = 1 \qquad\ reszta\ r_2 = 1 \quad bo \quad 2 = 2 * 1 + 1\\
&\frac{1}{2} = 0 + \tfrac{1}{2} \quad reszta\ r_3 = 1 \quad bo \quad 1 = 2 * 0 + 1
\end{aligned}$$

Pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej otrzymamy liczbę binarną

$$(r_3 r_2 r_1 r_0)_2 = (1111)_2$$

Powtórzmy kolejne dzielenia liczby 15 przez 2 według stosowanego innego schematu

Liczba x/2		*Reszta z dzielenia przez* 2
======	=	================
$15/2 = 7$	|	1
$7/2 = 3$	|	1
$3/2 = 1$	|	1
$1/2 = 0$	|	1

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$(1111)_2$$

Sprawdzenie:

$$(1111)_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15.$$

9.4.2 Schemat ogólny przeliczania liczb z sytemu dziesiętnego na binarny

Podobnie jak w wyżej w podanych przykładach, w schemacie ogólnym dzielimy liczbę dziesiętną x przez 2.

$$\frac{x}{2} = k_0 + \frac{r_0}{2}.$$

Skąd

$$x = 2 * k_0 + r_0$$

gdzie k_0 oznacza całość z $E[\frac{x}{2}]$ i r_0 oznacza resztę z dzielenia x przez 2
Ogólnie, piszemy

$$\frac{k_i}{2} = k_{i+1} + \frac{r_{i+1}}{2},$$

gdzie

$$k_i = 2 * k_{i+1} + r_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, ..., m.$$

dla

$$k_{i+1} = E[\frac{k_i}{2}] \quad i \quad r_{i+1}\ \ reszta\ z\ dzielenia\ k_i\ przez\ 2$$

9.4.3 Algorytm

Zapiszmy powyższe kolejne dzielenia w następującym schemacie

Liczba x	*Reszta*
==========	====
$x/2 = k_0 + r_0/2$	r_0
$k_0/2 = k_1 + r_1/2$	r_1
$k_1/2 = k_2 + r_2/2$	r_2
$k_2/2 = k_3 + r_3/2$	r_3
$\dots$	$\dots$
$k_{m-2}/2 = k_{m-1} + r_{m-1}/2$	r_{m-1}
$k_{m-1}/2 = 0 + r_m/2$	r_m

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = (r_m r_{m-1} r_{m-2} ... r_1 r_0)_2$$

9.4.4 Dowód algorytmu

[1] Zauważmy, że wyżej podany algorytm prowadzi do przeliczenia liczby dziesiętnej x na liczbę binarną.
Z tego algorytmu znajdujemy

x	$=$	$2k_0 + r_0$	$k_0 = 2k_1 + r_1$
	$=$	$2^3 k_2 + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0$	$k_2 = 2k_3 + r_3$
	$=$	$2^4 k_3 + 2^3 r_3 + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0$	$k_3 = 2k_4 + r_4$
	$\dots$	$\dots\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
	$=$	$2^{m-1} k_{m-2} + 2^{m-2} r_{m-2} + \dots + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0$	$k_{m-2} = 2k_{m-1} + r_{m-1}$
	$=$	$2^m k_m + 2^{m-1} r_{m-1} + \dots + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0$	$k_{m-1} = 2k_m + r_m$
	$=$	$2^m r_m + 2^{m-1} r_{m-1} + \dots + 2^2 r_2 + 2r_1 + r_0$	$k_m = r_m$
	$=$	$(r_m r_{m-1} r_{m-2} ... r_2 r_1 r_0)_2$	

Zastosujmy powyższy algorytm przeliczając liczbę dziesiętną $x = 256$ na binarną.

Liczba x/2	=	*Reszta z dzielenia przez* 2
======	=	================
$256/2 = 128$		0
$128/2 = 64$		0
$64/2 = 32$		0
$32/2 = 16$		0
$16/2 = 8$		0
$8/2 = 4$		0
$4/2 = 2$		0
$2/2 = 1$		0
$1/2 = 0$		1

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty z powyższej tabeli w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = 256 = (100000000)_2$$

Sprawdzenie:

$$(100000000)_2 = 1 * 2^8 + 0 * 2^7 + 0 * 2^6 + 0 * 2^5 + 0 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 256.$$

[1] Dowód można pominąć. Zanajomość dowodu algorytmu jest nie konieczna w przeliczaniu

9.4.5 Operacje arytmetyczne w systemie binarnym

Operacje arytmetyczne w systemie binarnym dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wykonujemy w podobny sposób jak w systemie dziesiętnym. Przypominamy, że w systemie dziesiętnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 10$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach dziesiętnych,$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.) Natomiast w systemie binarnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 2$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach binarnych $0, 1$.

9.4.6 Binarne dodawanie

Tabliczka binarnego dodawania

+	0	1
0	0	1
1	1	$(10)_2$

Binarna suma

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = (10)_2 = 1 * 2^1 + 0 * 2^0$$

Dodawanie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 9.21 *Wykonaj dodawanie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = (101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne dodawanie $101 + 11$, stosując tabliczkę binarnego dodawania.

$$\begin{array}{rr} & 101 \\ + & 11 \\ \hline & 1000 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 + 3 = (101)_2 + (11)_2 = (1000)_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 8.$$

Przykład 9.22 *Wykonaj dodawanie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = (101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne dodawanie $101 + 11$, stosując tabliczkę binarnego dodawania.

$$\begin{array}{rr} & 101 \\ + & 11 \\ \hline & 1000 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 + 3 = (101)_2 + (11)_2 = (1000)_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 8.$$

9.4.7 Binarne odejmowanie

Tabliczka binarnego odejmowania

-	0	1
1	0	-1
1	1	0

Binarna różnica

$$0-0=0$$
$$0-1=-1$$
$$1-0=1$$
$$1-1=0$$

Odejmowanie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 9.23 *Wykonaj dodawanie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = 101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne odejmowanie $(101)_2 - (11)_2$, stosując tabliczkę binarnego odejmowania.

$$\begin{array}{rr} & 101 \\ - & 11 \\ \hline & 10 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5-3=(101)_2-(11)_2=(10)_2=1*2^1+0*2^0=2.$$

9.4.8 Binarne mnożenie

Tabliczka binarnego mnożenia

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Binarny iloczyn

$$0*0=0$$
$$0*1=0$$
$$1*0=0$$
$$1*1=1$$

Mnożenie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 9.24 *Wykonaj mnożenie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = (101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.

Wykonujemy pisemne binarne mnożenie $(101)_2 * (11)_2$, stosując tabliczkę binarnego mnożenia i dodawania.

$$\begin{array}{r} 101 \\ * \quad 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 * 3 = (101)_2 * (11)_2 = (1111)_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 15.$$

9.4.9 Binarne dzielenie

Dzielenie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 9.25 *Wykonaj dzielenie binarne liczb dziesiętnych* 15 *podziel przez* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $15 = (1111)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne dzielenie $(101)_2 : (11)_2$, stosując tabliczkę binarnego dzielenia i dodawania.

$$\begin{array}{l} \quad 101 \\ \hline \quad 1111 : 11 \\ \quad 11 \\ \hline \quad = 11 \\ \quad\quad 11 \\ \hline \quad\quad\quad = \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 : 3 = (101)_2 : (11)_2 = (101)_2 = 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 5.$$

9.5 Liczby binarne parzyste i nieparzyste

Podobnie jak w systemie dziesiętnym, liczby binarne parzyste i nie parzyste poznajemy po cyfrze jedności. Mianowicie, jeżeli cyfra jedności liczby binarnej jest równa 0 to liczba binarna jest parzysta, w przeciwnym przypadku, jeżeli cyfra jedności liczby binarnej jest 1 to liczba binarna jest nieparzysta.

9.5.1 Liczby binarne parzyste

1. Liczby binarne parzyste mają cyfry jedności 0.
   Na przkład liczby binarne

   $$10,\ 110,\ 1010,\ 110110,\ 111110110$$

   mają cyfrę jedności 0, dlatego są parzyste.

2. Liczby binarne parzyste są podzielne przez binarne 10, zatem mają ogólną postać [2]

$$n = 10 * k, \quad \text{dla } k = 0, 10, 100, 110, 1000, ...;$$

Na przykład

$$\begin{array}{ll} k = 0, & n = 10 * 0 = 0, \\ k = 1, & n = 10 * 1 = 10, \\ k = 10, & n = 10 * 10 = 100, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \\ k = 1000, & n = 1000 * 100 = 10000, \end{array}$$

3. Suma, różnica i iloczyn liczb binarnych parzystych jest liczbą binarną parzystą
Na przykład:

$$a = 1000, \quad b = 110,$$

$$a + b = 1000 + 110 = 1110,$$

$$a - b = 1000 - 110 = 10,$$

$$a * b = 1000 * 110 = 110000$$

9.5.2 Liczby binarne nieparzyste

Własności liczb binarnych nieparzystych

1. Liczby binarne nieparzyste mają cyfrę jedności 1.
Na przkład liczby binarne

$$1\ 11,\ 111,\ 1011,\ 110111,\ 111110111$$

mają odpowiednio cyfrę jedności 1.

2. Liczby binarne nieparzyste mają ogólną postać

$$n = (10)_2 * k + 1, \quad \text{lub } n = (10)_2 * k - 1, \quad \text{dla } k = 0, 10, 100, 110, 1000, ...;$$

Na przykład

$$\begin{array}{llll} k = 0, & n = 10 * 0 + 1 = 1, & lub & n = 10 * 0 - 1 = -1 \\ k = 1, & n = 10 * 1 + 1 = 11, & lub & n = 10 * 1 - 1 = 1 \\ k = 10, & n = 10 * 10 + 1 = 101, & lub & n = 10 * 10 - 1 = 11 \\ k = 1000, & n = 10 * 1000 + 1 = 10001, & lub & n = 10 * 1000 - 1 = 1111 \\ \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{array}$$

3. Suma lub różnica dwóch liczb binarnych nieparzystych jest liczbą parzystą.

$$101 + 11 = 1000, \quad 101 - 11 = 10$$

Podaj inny przykład.

4. Iloczyn liczb binarnych nieparzystych jest liczbą nieparzystą
Na przykład:

$$101 * 11 = 1111, \quad 111 * 101 = 100011$$

Podaj inny przykład.

[2] Tutaj binarne liczby $(10)_2 = 10,\ 110 = (110)_2,\ 1010 = (1010)_2$ itd...; piszemy bez nawiasów

5. Natomiast suma liczby binarnej nieparzystej i liczby binarnej parzystej jest liczbą nieparzysta.

   Na przykład

6. $$101 + 110 = 1011.$$

   Podaj inny przykład

7. Podobnie, różnica liczby binarnej nieparzystej i liczby binarnej parzystej jest licbąnieparzystą. Na przykład

8. $$111 - 100 = 11$$

   Podaj inny przykład.

9.5.3 Przykłady

Zadanie 9.21 *Suma dwóch kolejnych liczb binarnych nieparzystych równa jest* $(100000)_2$. *Znajdż te liczby binarne.*

Rozwiązanie:
Dwie kolejne liczby binarne nieparzyste to

$$(10)_2 * n - 1, \quad (10)_2 * n + 1$$

Ich suma [3]

$$(10 * n - 1) + (10 * n + 1) = 100 * n = 100000$$

Obliczamy n:

$$100 * n = 100000, \quad \text{to} \quad n = 100000 : 100 = 1000$$

Obliczmy dwie kolejne liczby nieparzyste

$$10 * n - 1 = 10 * 1000 - 1 = 1111, \quad 10 * n + 1 = 10 * 1000 + 1 = 1001.$$

Sprawdzenie w systemie binarnym:

$$(10 * n - 1) + (10 * n + 1) = 10 * 1111 + 10 * 1001 = 11110 + 10010 = 100000$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

Zadanie 9.22 *Suma trzech kolejnych liczb binarnych parzystych równa jest* $(11000)_2$. *Znajdż te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne trzy liczby binarne parzyste to

$$10 * n - 10, \quad 10 * n, \quad 10 * n + 10.$$

Ich suma

$$(10 * n - 10) + (10 * n) + (10 * n + 10) = 110 * n = (11000)_2.$$

[3] Tutaj pomijamy nawias $10 \equiv (10_2$

Obliczamy n:

$$110 * n = 11000, \quad n = 11000 : 110 = 100.$$

Obliczmy trzy kolejnych liczb binarne parzyste

$$10 * n - 10 = 10 * 100 - 10 = 110,$$

$$10 * n = 10 * 100 = 1000,$$

$$10 * n + 10 = 10 * 100 + 10 = 1010,$$

Sprawdzenie:

$$(110)_2 + (1000)_2 + (1110)_2 + (1010)_2 = (11000)_2.$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

Zadanie 9.23 *Oblicz sumę liczb binarnych*

$$S_{1010} = 1 + 10 + 11 + 110 + 101 + 110 + 111 + 1000 + 1001 + 1010$$

używając tylko jednej operacji mnożenia binarnego i jednej operacji dzielenia binarnego.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_{1010} & = & 1 + 10 + 11 + 110 + 101 + 110 + 111 + 1000 + 1001 + 1010 \\ S_{10} & = & 1010 + 1001 + 1000 + 111 + 110 + 101 + 100 + 11 + 10 + 1 \\ - - - & \ldots & - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \\ 10 * S_{1010} & = & \underbrace{1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011}_{1010\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{1010} używając jednej operacji binarnego mnożenia i jednej operacji binarnego dzielenia.

$$(10)_2 * S_{1010} = (1010)_2 * (1011)_2 = (1101110)_2$$

$$S_{1010} = (1101110)_2 : (10)_2 = (11111)_2$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

9.5.4 Zadania

Zadanie 9.24 *Przelicz liczby dziesiętne na liczby binarne stosując algorytm przeliczania.*

(a) $x = 53$

(b) $x = 1025$

Sprawdź otrzymane wyniki przeliczenia.

Zadanie 9.25 .

(a) Przelicz liczby dziesiętne 513 *i* 25 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*

(b) Dodaj liczby binarne

$$(1000000001)_2 + (100001)_2$$

Zadanie 9.26 .
(a) Przelicz liczby dziesiętne 256 *i* 16 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) Odejmij liczby binarnych

$$(100000000)_2 - (1000)_2$$

Sprawdź wynik odejmowanie.

Zadanie 9.27 .
(a) Przelicz liczby dziesiętne 129 *i* 3 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) Pomnóż liczby 129 *i* 3 *w systemie binarnym Sprawdź wynik mnożenia.*

Zadanie 9.28 .
(a) Przelicz liczby dziesiętne 63 *i* 3 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) Podziel liczbę 63 *przez liczbę* 3 *w systemie binarnym Sprawdź wynik dzielenia.*

Zadanie 9.29 *Ile jest różnych liczb binarnych trzycyfrowych?*

Zadanie 9.30 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji dodawania,odejmowania, mnożenia i dzielenia.*

$$(10)_2 * (101)_2 + (11)_2 * (101)_2 - (110)_2 : (10)_2$$

Zadanie 9.31 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji arytmetycznych z nawiasami.*

(a)

$$(100)_2 * ((10)_2 * (101)_2 + (11)_2 * (101)_2).$$

(b)

$$(10)_2 * ((110)_2 : (10)_2 - (1000)_2 : (100)_2)$$

Zadanie 9.32 *Suma pięciu kolejnych liczb binarnych parzystych równa jest* $(100100)_2$. *Znajdź te liczby.*

Zadanie 9.33 *Oblicz sumę liczb binarnych parzystych*

$$\begin{aligned} S_{10100} &= (10)_2 + (100)_2 + (110)_2 + (1000)_2 + (1010)_2 + (1100)_2 + \\ &+ (1110)_2 + (10000)_2 + (10010)_2 + (10100)_2 \end{aligned}$$

używając tylko jednej operacji mnożenia binarnego.

9.6 System ósemkowy. Octalny

W systemie pozycyjnym ósemkowym podstawa $\rho = 8$. Odpowiedni wielomian jest wyrażeniem algebraicznym

$$a_{n-1}8^{n-1} + a_{n-2}8^{n-2} + \cdots + a_1 8^1 + a_0 8^0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0)_8$$

Osiem cyfr systemu ósemkowego to są liczby jednocyfrowe

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Współczynniki systemu ósemkowego [4]

$$(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})_8$$

przyjmują wartoći $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
Na przykład, liczba ósemkowa $x = (\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0)_8 = (1257)_8$ ma
ilość jedności $8^0 = 1,\ \alpha_0 = 7$,
ilość ósemek $8^1,\ \alpha_1 = 5$,
ilość kwadratów ósemek $8^2,\ \alpha_2 = 2$
ilość kubików ósemek $8^3,\ \alpha_3 = 1$.
Zauważmy, że w systemie dziesiętnym podstawą jest liczba 10. W systemie dziesiętnym piszemy liczby używając 10-ciu cyfr

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Natomiast w systemie ósemkowym podstawą jest liczba 8. W ósemkowym systemie jest osiem cyfr

$$0, 1, 3, 4, 5, 6, 7$$

które są jednocześnie liczbami jednocyfowymi ósemkowymi.
Liczby ósemkowe dwucyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_1 * 8 + a_0 = (a_1a_0)_8$$

gdzie cyfrą ósemek jest współczynnik a_1, cyfrą jedności jest współczynnik a_0

Przykład 9.26 *Liczba ósemkowa* $x = (65)_8$

$$6 * 8 + 5 * 8^0 = (65)_8.$$

Tytaj cyfrą ósemek jest współczynnik $a_1 = 6$*, cyfra jedności współczynnik* $a_0 = 5$*. Wartość tej liczby ósemkowej w zapisie dziesiętnym jest równa* 53*.*
Rzeczywiście, obliczmy wartość dziesiętną liczby ósemkowej $(65)_8$

$$(65)_8 = 6 * 8 + 5 * 1 = 53$$

Liczby ósemkowe trzycyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_2 * 8^2 + a_1 * 8^1 + a_0 * 8^0 = (a_2a_1a_0)_2$$

gdzie kolejne potęgi ósemki

$$8 * 8 = 8^2,\ \ 8^1 = 8,\ \ 8^0 = 1.$$

Przykład 9.27 *Na przykład liczbę ósemkową* $x = (256)_8$ *w ogólnym zapisie piszemy*

$$a_2 * 8^2 + a_1 * 8^1 + a_0 * 8^0 = (a_2a_1a_0)_2,$$

$$2 * 8^2 + 5 * 8^1 + 6 * 8^0 = (256)_8,$$

gdzie cyfra ósemkowa $a_2 = 2$ *jest współczynnikiem przy* 8^2*,*
cyfra ósemkowa $a_1 = 5$ *jest współczynnikiem przy* 8*,*
cyfra ósemkowa jedności $a_0 = 6$.
Wartość tej liczby w systemie dziesięnym

$$(256)_8 = 2 * 2^2 + 5 * 8^1 + 6 * 8^0 = 174$$

[4] Liczby oktalne piszemy $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})_8$ w nawiasie z ideksem na dole 8

Ogólnie liczby n-cyfrowe w pozycyjnym systemie ósemkowym piszemy jako współczynniki wyrażenia algebraicznego

$$a_{n-1}8^{n-1} + a_{n-2}8^{n-2} + \cdots + a_1 8^1 + a_0 * 8^0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0)_8$$

Przykład 9.28 *Niech $n = 5$, wtedy liczbę ósemkową czterocyfową $x = (1024)_8$.*
piszemy w postaci wyrażenia arytmetycznego

$$1 * 8^3 + 0 * 8^2 + 2 * 8^1 + 4 * 8^0 = (1024)_8$$

gdzie wpsółczynnik przy 8^3 jest równy $a_3 = 1$,
wpsółczynnik przy 8^2 jest równy $a_2 = 0$,
wpsółczynnik przy 8^1 jest równy $a_1 = 2$,
wpsółczynnik jedności przy 8^0 jest równy $a_0 = 4$,
Obliczmy wartość dziesiętną tej liczby

$$1 * 8^3 + 0 * 8^2 + 2 * 8^1 + 4 * 8^0 = 512 + 16 + 4 = 536$$

9.6.1 Przeliczanie liczb dziesiętnym na liczby ósemkow

Każdą liczbę dziesiętną można przeliczyć na liczbę ósemkową, oktalną. Tak jak dla systemu binarnego to przeliczanie jest proste. Mianowicie, dzielimy liczbę dziesiętną przez 8 i piszemy resztę. Następnie część całkowitą tego dzielenia dzielimy przez 8 i piszemy resztę. Dalej kontynuujemy dzielenie części całkowitych przez 8 zapisując ich reszty tak długo aż w wyniku dzielenia przez 8 otrzymamy część całkowitą równą 0.
Liczbę ósemkową otrzymujemy pisząc reszty z dzielenia w kolejności zaczynając od ostatniej reszty i kończąc na pierwszej reszcie jako cyfrze ósemkowej jedności. Zobaczmy przeliczanie liczb dziesiętnych na ósemkowe na przykładach.

Przykład 9.29 *Przelicz liczbę dziesiętną $x = 38$ na liczbę ósemkową*

Wykonujemy dzielenia liczby dziesiętnej $x = 38$ przez 8

$$\frac{38}{8} = 4 + \frac{6}{8} \quad \textit{reszta } r_0 = 6 \quad \textit{bo} \quad 38 = 8 * 4 + 6$$
$$\frac{4}{8} = 0 \qquad \textit{reszta } r_1 = 4 \quad \textit{bo} \quad 4 = 0 + 4 * 1$$

Pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej otrzymamy liczbę ósemkową

$$x = (r_1 r_0)_8 = (46)_8$$

Powtórzmy kolejne dzielenia liczby 38 przez 8 według innego stosowanego schematu

Liczba $x/2$		*Reszta z dzielenia przez 2*
======	=	================
$38/8 = 4$	|	6
$4/8 = 0$	|	4

W wyniku otrzymujemy liczbę ósemkową pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = (46)_8$$

Sprawdzenie:

$$x = (46)_8 = 4 * 8 + 6 * 8^0 = 8 + 1 = 38.$$

9.6.2 Schemat ogólny przeliczania liczb z sytemu dziesiętnego na ósemkowy

Podobnie jak w wyżej w podanych przykładach, w schemacie ogólnym dzielimy liczbę dziesiętną x przez 8.

$$\frac{x}{2} = k_0 + \frac{r_0}{2}, \quad x = 2 * k_0 + r_0$$

gdzie k_0 to całość i r_0 to reszta z dzielenia x przez 8

9.6.3 Algorytm

Zapiszmy powyższe kolejne dzielenia przez 8 w następującym schemacie

Liczba x	*Reszta*
==========	====
$x/8 = k_0 + r_0/8$	r_0
$k_0/8 = k_1 + r_1/8$	r_1
$k_1/8 = k_2 + r_2/8$	r_2
$k_2/8 = k_3 + r_3/8$	r_3
$\dots$	$\dots$
$k_{m-2}/8 = k_{m-1} + r_{m-1}/8$	r_{m-1}
$k_{m-1}/8 = 0 + r_m/8$	r_m

W wyniku otrzymujemy liczbę ósemkową pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = (r_m r_{m-1} r_{m-2} ... r_1 r_0)_8$$

9.6.4 Dowód algorytmu

[5] Zauważmy, że wyżej podany algorytm prowadzi do przeliczenia liczby dziesiętnej x na liczbę ósmkową.
Z tego algorytmu znajdujemy

x	$=$	$8k_0 + r_0$	$k_0 = 8k_1 + r_1$
	$=$	$8^3 k_2 + 8^2 r_2 + 8r_1 + r_0$	$k_2 = 8k_3 + r_3$
	$=$	$8^4 k_3 + 8^3 r_3 + 8^2 r_2 + 8r_1 + r_0$	$k_3 = 8k_4 + r_4$
	$\dots$	$\dots\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
	$=$	$8^{m-1} k_{m-2} + 8^{m-2} r_{m-2} + \dots + 8^2 r_2 + 8r_1 + r_0$	$k_{m-2} = 8k_{m-1} + r_{m-1}$
	$=$	$8^m k_m + 8^{m-1} r_{m-1} + \dots + 8^2 r_2 + 8r_1 + r_0$	$k_{m-1} = 8k_m + r_m$
	$=$	$8^m r_m + 8^{m-1} r_{m-1} + \dots + 8^2 r_2 + 8r_1 + r_0$	$k_m = r_m$
	$=$	$(r_m r_{m-1} r_{m-2} ... r_2 r_1 r_0)_8$	

Zastosujmy powyższy algorytm przeliczając liczbę dziesiętną $x = 256$ na ósemkową.

Liczba x/8		*Reszta z dzielenia przez* 8
======	=	================
$256/8 = 32$		0
$32/8 = 4$		0
$4/8 = 0$		4

[5] Dowód można pominąć. Zanajomość dowodu algorytmu jest nie konieczna w przeliczaniu

W wyniku otrzymujemy liczbę ósemkową pisząc reszty z powyższej tabeli w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = 256 = (400)_8$$

Sprawdzenie:

$$x = (400)_8 = 4 * 8^2 + 0 * 8^1 + 0 * 8^0 = 256.$$

9.6.5 Operacje arytmetyczne w systemie ósemkowym

Operacje arytmetyczne w systemie ósemkowym dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wykonujemy w podobny sposób jak w systemie dziesiętnym. Przypominamy, że w systemie dziesiętnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 10$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach dziesiętnych),$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Podobnie w systemie binarnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 2$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach octalnych) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

9.6.6 Oktalne dodawanie

Tabliczka oktalnego dodawania

	Dodawanie				oktalnego			
+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	10	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Dodawanie ósemkowe wyjaśniamy na przykładach

Przykład 9.30 *Wykonaj dodawanie ósemkowe liczb dziesiętnych* 25 *i* 13

Liczba dziesiętna 25 w zapisie oktalnym $25 = (31)_8$, liczba dziesiętna 13 w zapisie oktalnym $13 = (15)_8$.
Wykonujemy pisemne ósemkowe dodawanie $(31)_8 + (13)_8$, stosując tabliczkę ósemkowego dodawania.

$$\begin{array}{rr} & 31 \\ + & 15 \\ \hline & 46 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$(46)_8 = 4 * 8 + 6 * 8^0 = 38.$$

9.6.7 Oktalne odejmowanie

Tabliczka oktalnego odejmowania

	Odejmowanie				oktalne			
-	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
1	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
2	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
3	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
4	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
5	5	4	3	2	1	0	-1	-2
6	6	5	4	3	2	1	0	-1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Odejmowanie oktalne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 9.31 *Wykonaj odejmowanie oktalne liczb dziesiętnych* 9 *i* 8

Liczba dziesiętna 9 w zapisie oktalnym $8 = (11)_8$, liczba dziesiętna 8 w zapisie oktalnym $8 = (10)_8$.
Wykonujemy pisemne oktalne odejmowanie $(11)_8 - (10)_8$, stosując tabliczkę oktalnego odejmowania.

$$\begin{array}{rr} & 11 \\ - & 10 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$9 - 8 = (11)_8 - (10)_8 = (1)_8 = 1.$$

9.6.8 Oktalne mnożenie

Tabliczka oktalnego mnożenia

	Mnożenie				oktalne		
*	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	31	36	52
7	7	16	25	34	43	52	61

Mnożenie oktalne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 9.32 *Wykonaj mnożenie oktalne liczb dziesiętnych* 9 *i* 15

Liczba dziesiętna 9 w zapisie oktalnym $9 = (11)_8$, liczba dziesiętna 15 w zapisie oktalnym $15 = (17)_8$.
Wykonujemy pisemne oktalne mnożenie $(11)_8 * (17)_8$, stosując tabliczkę oktalnego mnożenia

i dodawania.

$$\begin{array}{r} 17 \\ *\ 11 \\ \hline 17 \\ 17 \\ \hline 207 \end{array}$$

Sprawdzenie:
Mnożenie liczb dziesiętnych

$$9 * 15 = 135$$

Mnożenie liczb oktalnych

$$(11)_8 * (17)_8 = (207)_8$$
$$(207)_8 = 2 * 8^2 + 0 * 8^1 + 7 * 8^0 = 2 * 64 + 7 = 135$$

9.6.9 Oktalne dzielenie

Dzielenie oktalne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 9.33 *Wykonaj dzielenie oktalne liczb dziesiętnych* 45 *podziel przez* 3

Liczba dziesiętna 45 w zapisie oktalnym $45 = (55)_8$, liczba dziesiętna 3 w zapisie oktalnym $3 = (3)_3$.
Wykonujemy pisemne oktalne dzielenie $(17)_8 : (3)_8$.

$$\begin{array}{l} \quad 17 \\ \hline \quad 55 : 3 \\ -3 \\ \hline \quad 25 \\ \quad 25 \\ \hline \quad = \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$45 : 3 = 15$$
$$(55)_8 : (3)_8 = (17)_8 = 1 * 8 + 7 = 15.$$

9.7 Liczby oktalne parzyste i nieparzyste

Podobnie jak w systemie dziesiętnym, liczby oktalne parzyste i nie parzyste poznajemy po cyfrze jedności. Mianowicie, jeżeli cyfra jedności liczby oktalnej jest równa 0 lub 2 lub 4 lub 6 to liczba oktalna jest parzysta, w przeciwnym przypadku, jeżeli cyfra jedności liczby oktalnej jest 1 lub 3 lub 5 lub 7 to liczba oktalna jest nieparzysta.

9.7.1 Liczby oktalne parzyste

1. Liczby oktalne parzyste mają cyfry jedności 0.
   Na przkład liczby oktalne

   $$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 20,\ 22,\ 24$$

   mają cyfrę jedności 0, 2 4, 6, dlatego są parzyste.

2. Liczby oktalne parzyste są podzielne przez oktalną 2, zatem mają ogólną postać [6]

   $$n = 2 * k, \quad \text{dla } \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, ...;$$

   Na przykład

   $$\begin{array}{ll} k = 0, & n = 2 * 0 = 0, \\ k = 1, & n = 2 * 1 = 2, \\ k = 2, & n = 2 * 2 = 4, \\ k = 3, & n = 2 * 3 = 6, \\ k = 4, & n = 2 * 4 = 10, \\ k = 5, & n = 2 * 5 = 12, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

3. Suma, różnica i iloczyn liczb oktalnych parzystych jest liczbą oktalną parzystą
   Na przykład:

   $$a = (12)_8, \quad b = (36)_8,$$

   $$a + b = (12)_8 + (36)_8 = (50)_8,$$

   $$a - b = (12)_8 - (50)_8 = -(24)_8,$$

   $$a * b = (12)_8 * (36)_8 = (454)_8$$

9.7.2 Liczby oktalne nieparzyste

Własności liczb oktalnych nieparzystych

1. Liczby oktalne nieparzyste mają cyfry jedności 1 lub 3 lub 5 lub 7.
   Na przkład liczby binarne

   $$1\ 23,\ 35,\ 47,\ 121,\ 123,\ 125,\ 127$$

   mają odpowiednio cyfry jedności 1, 3 5 7 1, 3 5 7..

2. Liczby pktalne nieparzyste mają ogólną postać

   $$n = (2)_8 * k + 1, \quad \text{lub } n = (2)_8 * k - 1, \ \text{ dla } \ k = 0, 1, 2, 3, 4, ...;$$

   Na przykład

   $$\begin{array}{llll} k = 0, & n = 2 * 0 + 1 = 1, & lub & n = 2 * 0 - 1 = -1 \\ k = 1, & n = 2 * 1 + 1 = 3, & lub & n = 2 * 1 - 1 = 1 \\ k = 2, & n = 2 * 2 + 1 = 5, & lub & n = 2 * 2 - 1 = 3 \\ k = 3, & n = 2 * 3 + 1 = 7, & lub & n = 2 * 3 - 1 = 5 \\ k = 4, & n = 2 * 4 + 1 = 11, & lub & n = 2 * 4 - 1 = 7 \\ k = 5, & n = 2 * 5 + 1 = 13, & lub & n = 2 * 5 - 1 = 11 \\ k = 6, & n = 2 * 6 + 1 = 15, & lub & n = 2 * 6 - 1 = 13 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

[6] Tutaj oktalne liczby $(1)_8 = 1,\ (2)_8 = 2,\ (3)_8$ itd...; piszemy bez nawiasów

3. Suma lub różnica dwóch liczb oktalnych nieparzystych jest liczbą parzystą.

$$(13)_8 + (11)_8 = (24)_8, \quad (13)_8 - (11)_8 = 2$$

Podaj inny przykład.

4. Iloczyn liczb oktalnych nieparzystych jest liczbą nieparzystą
Na przykład:

$$(13)_8 * (11)_8 = (143)_8,$$

Podaj inny przykład.

5. Natomiast suma liczby oktalnej nieparzystej i liczby oktalnej parzystej jest liczbą nieparzysta.

Na przykład

6.

$$(26)_8 + (15)_8 = (43)_8.$$

Podaj inny przykład

7. Podobnie, różnica liczby oktalnej nieparzystej i liczby binarnej parzystej jest licbąnieparzystą.
Na przykład

8.

$$(26)_8 - (15)_8 = (11)_8$$

Podaj inny przykład.

9.7.3 Przykłady

Zadanie 9.34 *Przelicz liczby dziesiętne na liczby oktalne*

(a) x=100

(b) y=500

Rozwiązanie (a):
Dzielimy liczbę dziesiętną 100 przez 8 według schematu

Liczba $x/8$		*Reszta z dzielenia przez* 8
$100/8 = 12$	|	4
$12/8 = 1$	|	4
$1/8 = 0$	|	1

Zapis oktalny liczby dziesiętnej $x = 100$ otrzymamy pisząc reszty tego dzielenie od ostatniej do pierwszej

$$x = (144)_8$$

Sprawdzenie:

$$x = (144)_8 = 1 * 8^2 + 4 * 8 + 4 = 64 + 32 + 4 = 100$$

Rozwiązanie (b):
Dzielimy liczbę dziesiętną 500 przez 8 według schemtatu

Liczba $x/8$		*Reszta z dzielenia przez* 8
$500/8 = 62$	|	4
$62/8 = 7$	|	6
$7/8 = 0$	|	7

Zapis oktalny liczby dziesiętnej $x = 500$ otrzymamy pisząc reszty tego dzielenie od ostatniej do pierwszej

$$x = (764)_8$$

Sprawdzenie:

$$x = (764)_8 = 7 * 8^2 + 6 * 8 + 4 = 64 + 32 + 4 = 448 + 48 + 4 = 500$$

Zadanie 9.35 *Suma dwóch kolejnych liczb oktalnych nieparzystych równa jest* $(500)_8$. *Znajdź te liczby binarne.*

Rozwiązanie:
Dwie kolejne liczby oktalne nieparzyste to

$$(2)_8 * n - 1, \quad (2)_8 * n + 1$$

Ich suma [7]

$$(2 * n - 1) + (2 * n + 1) = 4 * n = 500$$

Obliczamy n:

$$4 * n = 500, \quad \text{to} \quad n = 500 : 4 = 120$$

Obliczmy dwie kolejne liczby nieparzyste oktalne

$$(2)_8 * n - 1 = (2)_8 * (120)_8 - 1 = (237)_8,$$

$$(2)_8 * n + 1 = (2)_8 * (120_8 + 1 = (241)_8.$$

Sprawdzenie w systemie oktalnym:

$$(2)_8 * n - 1) + ((2)_8 * n + 1) = (237)_8 + (241)_8 = (500)_8$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

Zadanie 9.36 *Suma trzech kolejnych liczb oktalnych parzystych równa jest* $(52)_8$. *Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne trzy liczby oktalne parzyste to

$$(2)_8 * n - (2)_8, \quad (2)_8 * n, \quad (2)_8 * n + (2)_8.$$

Ich suma

$$[(2)_8 * n - (2)_8] + (2)_8 * n + [(2)_8 * n + (2)_8] = (6)_8 * n = (52)_8.$$

[7] Tutaj pomijamy nawias $2 \equiv (2)_8$ wykonując operacje na liczbach oktalnych

Obliczamy n:

$$(6)_8 * n = (52)_8, \quad n = (52)_8 : (6)_8 = (7)_8.$$

Obliczmy trzy kolejnych liczb binarne parzyste

$$(2)_8 * n - (2)_8 = (2)_8 * (7)_8 - (2)_8 = (14)_8,$$

$$(2)_8 * n = (2)_8 * (7)_8 = (16)_8,$$

$$(2)_8 * n + (2)_8 = (2)_8 * (7)_8 + (2)_8 = (20)_8.$$

Sprawdzenie:

$$(14)_8 + (16)_8 + (20)_8 = (52)_8.$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

Zadanie 9.37 *Oblicz sumę liczb oktalnych*

$$S_{20} = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 20$$

używając tylko jednej operacji mnożenia oktalnego i jednej operacji dzielenia oktalnego.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami składniki sumy wykonując dodawanie oktalne na liczbach oktalnych, jak niżej:

$$\begin{aligned} S_{20} &= 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 20 \\ S_{20} &= 20 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 \\ --- &\cdot \quad ---------- \\ 2 * S_{20} &= \underbrace{30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30}_{(11)_8 \; oktalnych \; skladnikow \; sumy} \end{aligned}$$

Skąd obliczmy sumę S_{20} używając jednej operacji oktalnego mnożenia i jednej operacji oktalnego dzielenia.

$$(2)_8 * S_{20} = (11)_8 * (36)_8 = (416)_8$$

$$S_{20} = (416)_8 : (2)_8 = (207)_8$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

9.7.4 Zadania

Zadanie 9.38 *Przelicz liczby dziesiętne na liczby oktalne stosując algorytm oktalnego przeliczania.*

(a) $x = 53$

(b) $x = 1025$

Sprawdź otrzymane wyniki przeliczenia w systemie oktalnym i systemie dziesiętnym.

Zadanie 9.39 .
(a) Przelicz liczby dziesiętne 513 *i* 25 *na liczby oktalne.*
(b) Dodaj liczby oktalne

$$(1003)_8 + (10005)_8$$

Sprawdź wynik dodawania w systemie oktalnym i dziesiętnym

Zadanie 9.40 .
(a) Przelicz liczby dziesiętne 256 *i* 16 *na liczby oktalne.*
(b) Odejmij liczby oktalnych

$$(10005)_8 - (1003)_8$$

Sprawdź wynik odejmowanie w systemie oktalnym i dziesiętnym.

Zadanie 9.41 .
(a) Przelicz liczby dziesiętne 129 *i* 3 *na liczby oktalne.*
(b) Pomnóż liczby 129 *i* 3 *w systemie oktalnym Sprawdź wynik mnożenia w systemie oktalnym i dziesętnym.*

Zadanie 9.42 *Ile jest różnych liczb oktalnych dwucyfrywych?*

Zadanie 9.43 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego liczb oktalnych zachowując kolejność operacji dodawania,odejmowania, mnożenia i dzielenia.*

$$(10)_8 * (11)_8 + (12)_8 * (13)_8 - (14)_8 : (4)_8$$

Zadanie 9.44 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji arytmetycznych z nawiasami.*

(a)

$$(2)_8 * [(10)_8 * (11)_8 + (11)_8 * (12)_8].$$

(b)

$$(3)_8 * [(160)_8 : (10)_8 - (20)_8 : (100)_8]$$

Sprawdź wynik oktalnych obliczeń w systemie dziesiętnym.

Zadanie 9.45 *Suma trzech kolejnych liczb oktalnych parzystych równa jest* $(14)_8$. *Znajdż te liczby.*

Zadanie 9.46 *Oblicz sumę liczb oktalnych nieparzystych*

$$S_{23} \quad = \quad (11)_8 + (13)_8 + (15)_8 + (17)_8 + (21)_8 + (23)_8$$

używając tylko jednej operacji mnożenia oktalnego.

Chapter 10

Wielomiany

Pod pojęciem *wielomiany* rozumiemy najprostrzą klasę funkcji o bardzo szerokim zakresie zastosowań. W tym wielomiany stopnia $n = 0, 1, 2, 3, ..., m$, jednej i wielu zmiennych, wielomiany interpolacyjne, wielomiany jako funkcje specjalne i dwumian Newtona.
Jasne, że w programie szkoły podstawowej nie wszystkie rodzaje wielomianów występują, a jeżeli występują to w bardzo elementarnej formie. W tym rozdziale wielomiany są rozpatrywane w najprostrzej postaci.

10.1 Jednomiany, dwumiany i trójmiany

Jednomianem nazywamy ciąg liczb lub ciąg liczb i liter lub ciąg tylko liter połączonych operacją mnożenia.
Wymieńmy kilka jednomianów

125	247, *jedna liczba jest jednomianem*
$2 * 5 * 7$,	$3 * 4 * 5 * 6 * 7$,
$3 * a * b$	$a * b * c$,
$4 * *5 * x * y * z$,	$5 * a^2 * b^3 * c^4$,
$15 * x^3 * y^2 * z^3$	$7 * 9 * a^4 * b^5 * x^6 * y^7$.

Każdy jedomian jest szczególnym wyrażeniem arytmetycznym lub algebraicznym, gdyż występują w ich określeniu liczby lub litery połączone tylko operacją mnożenia.
Dwumianem nazywamy sumę dwóch jednomianów.
Na przykład

$$a + b, \quad a - b, \quad a^2 + b^2, \quad 3x^3 + 5y^3.$$

Podobnie trójmianem nazywamy sumę trzech jednomianów.
Na przykład

$a + b + c$,	$2 * x_3 + 4 * y^3 + 5 * x * y$,
$a^2 + 2 * a * b + b^2$,	$x^2 - 2 * x * y + y^2$.

10.2 Funkcja liniowa.

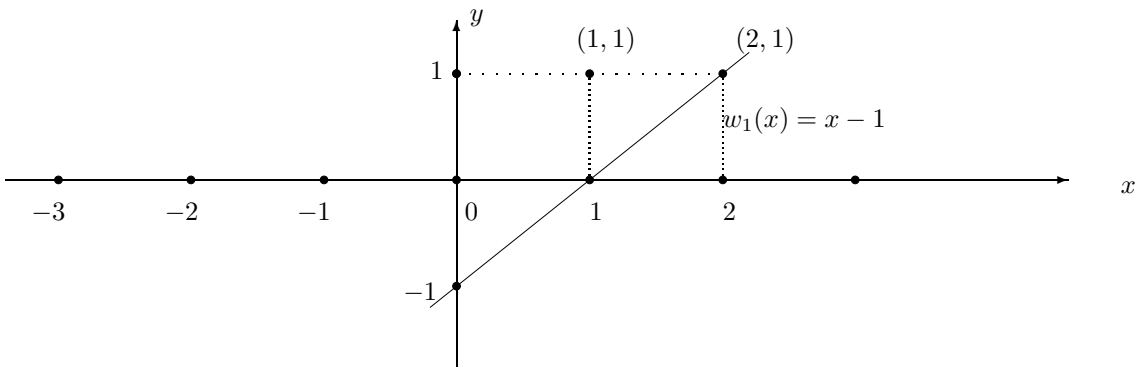
Funkcja liniowa, czyli wielomian stopnia $n = 1$ jest dwumianem szczególnej postaci:

$$w_1(x) = a\ x + b \tag{10.1}$$

o współczynnikach a i b oraz zmiennej x.
Dwumian $w_1(x) = a\ x + b$ nazywamy funckcją liniową, gdyż jej wykresem jest linia prosta.

Jeżeli współczynnik $a = 0$ to funkcja liniowa jest stała, której wykresem jest prosta równoległa do osi x. Funkcja liniowa ustala zależność pomiędzy współrzędnymi x i y, którą piszemy

$$w_1(x) = ax + b, \qquad lub \qquad y = ax + b$$



Wykres funkcji liniowej $y = x - 1$, w układzie współrzędnych x, y

Zauważmy, że linia prosta o równaniu $y = x - 1$ przechodzi przez punkty $(0, -1)$, $(1, 0)$ i przez punkt $(2, 1)$. Wartości tej funkcji liniowej obliczamy niżej dla argumentu $x = 0,\ 1,\ 2$

$$w_1(0) = 0 - 1 = -1, \quad w_1(1) = 1 - 1 = 0, \quad w_1(2) = 2 - 1 = 1.$$

Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.
Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1)$$

piszemy jako następującą zależność współrzędnej y od współrzędnej x:

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \tag{10.2}$$

Istotnie, gdy $x = x_0$ to $y = y_0$ lub gdy $x = x_1$ to $y = y_1$. To znaczy, że punkty (x_0, y_0), (x_1, y_1) leżą na prostej, gdyż ich współrzędne spełniają równanie prostej.

Przykład 10.1 *Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ i $(x_1, y_1) = (0, 1)$. Sprawdź który z punktów $(1, 1)$, $(1, 2)$ leży na prostej.*

Rozwiązanie:
Piszemy równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$(x_0, y_0) = (-1, 0) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1)$$

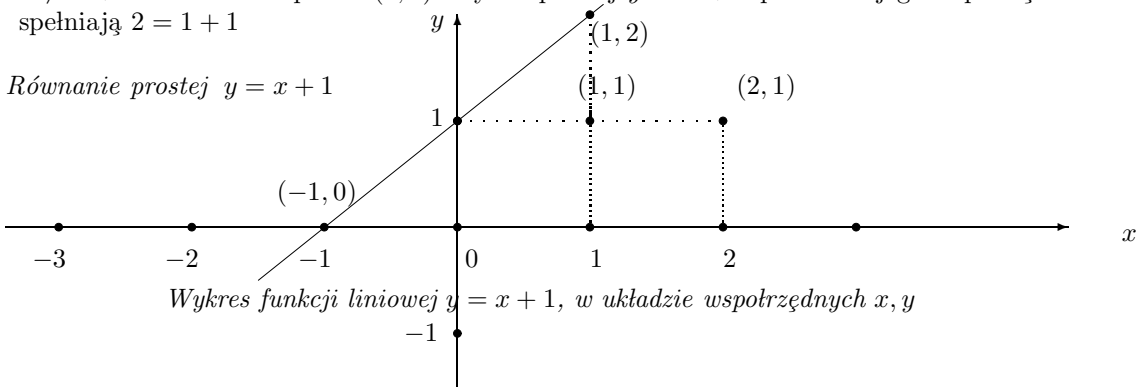
podstwiając do wzoru (10.2) ich współrzędne

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = \frac{x - 0}{-1 - 0} * 0 + \frac{x + 1}{0 + 1} * 1 = x + 1$$

Odpowiedź: Równanie prostej przechodzącej przez punkty $(-1, 0)$ i $(0, 1)$

$$y = x + 1$$

Punkt $(1,1)$ nie leży na prostej $y = x+1$ ponieważ jego współrzędne nie spełniają równania $1 \neq 1+1$. Natomiast punkt $(1,2)$ leży na prostej $y = x+1$ ponieważ jego współrzędne spełniają $2 = 1+1$



10.2.1 Położenie prostych na płaszczyźnie.

Funkcja liniowa

$$y = ax + b$$

określa położenie prostej na płaszczyźnie (x, y). To znaczy, że punkt o współrzędnych (x, y) leży na prostej, jeżeli $y = ax + b$.

Funkcja liniowa $y = ax + b$ przecina oś x w punkcie $(\frac{-b}{a}, 0)$ i przecina oś y w punkcie $(0, b)$.

Mówimy, że liczba x jest proporcjonalna do liczby y, jeżeli $y = ax$ lub $\frac{y}{x} = a$. Zatem proporcjonalność dwóch wielkości wyraża funkcja liniowa. Wtedy $a \neq 0$ jest współczynnikiem proporcjonalności.

Zauważmy, że prosta $y = ax + b$

- przecina oś y, w punkcie $(0, b)$, gdy $x = 0$, wtedy
$$y = ax + b = a * 0 + b = b$$
- przecina oś x, w punkcie $(-\frac{b}{a}, 0)$, gdy $x = -\frac{b}{a}$, wtedy
$$y = ax + b = a(-\frac{b}{a}) + b = 0.$$
- jeżeli $a = 0$ to $y = b$ wtedy prosta jest równoległa do osi x
- dwie proste o równaniach
$$y = a_1 x + b_1, \qquad y = a_2 x + b_2$$
przecinają się w punkcie (x_0, y_0), jeżeli ten punkt spełnia rónania tych prostych
$$y_0 = a_1 x_0 + b_1, \qquad i \qquad y_0 = a_2 x_0 + b_2$$
- dwie proste są równoległe, jeżeli $a_1 = a_2$. Wtedy proste nie mają punktu wspólnego lub pokrywają się.

Przykład 10.2 *Podaj położenie na płaszczyźnie (x, y) dwóch prostych o rónaniach*

$$y = x, \qquad y = 1 - x$$

Znajdź ich punkty przecięcia z osiami x i y oraz punkt przecięcia tych prostych.

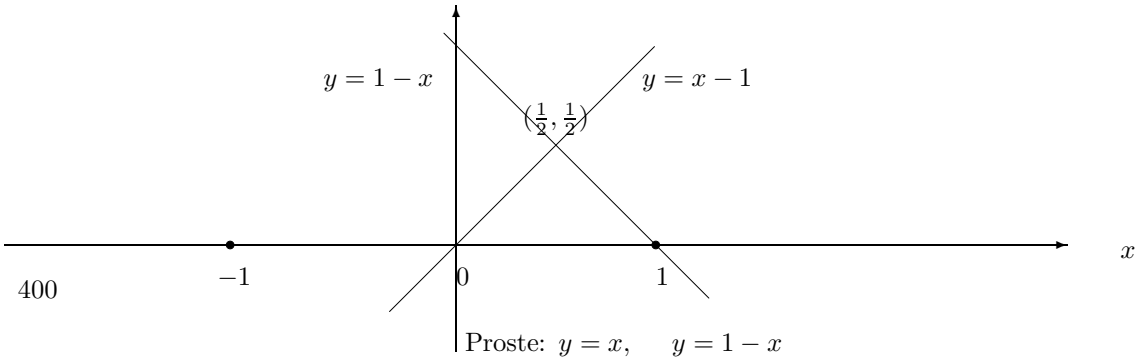
Rozwiązanie. Prosta o równaniu $y = x$ przecina oś x i oś y w początku układu współrzędnych $(0, 0)$, wtedy $x = 0$ i $y = 0$.
Podobnie, prosta o równaniu $y = 1 - x$ przecina oś x, gdy $y = 0$, to znaczy $1 - x = 0$, dla $x = 1$, w punkcie $(1, 0)$. Ta prosta przecina oś y gdy $x = 0$, wtedy $y = 1 - 0 = 1$ to jest w punkcie $(0, 1)$.
Dwie proste przecinają się w punkcie (x, y) gdy współrzędne tego punktu spełniają oba równania, to znaczy

$$y = x, \quad \text{oraz} \quad y = 1 - x$$

Skąd przez podstawien $y = x$ do drugiego równania znajdujemy

$$x = 1 - x, \qquad 2x = 1, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Zatem proste przecinają się w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Zadanie 10.1 *Podaj położenie na płaszczyźnie (x, y) dwóch prostych o rónaniach*

$$y = 2x - 1, \qquad y = 1 - 2x$$

Znajdź ich punkty przecięcia z osiami x i y oraz punkt przecięcia tych prostych.

Zadanie 10.2 *Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ i $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Sprawdź który z punktów $(0, 1)$, $(2, 2)$ leży na prostej.*

Zadanie 10.3 *W których punktach prosta $y = -3x+6$ przecina osie współrzędnych. Oblicz wartość tej funkcji liniowej dla $x = 1$. Sprawdź który z punktów $(0, 3)$, $(2, 0)$ leży na prostej.*

10.3 Funkcja kwadratowa

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem

$$w_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c, \qquad \text{lub} \quad y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0. \tag{10.3}$$

W przypadku gdy współczynnik $a = 0$ funkcja $y = bx + c$ jest liniowa.
Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych R. Natomiast, zbiór wartości funkcji kwadratowej zależy od współczynników a, b, c i nie jest całym zbiorem liczb rzeczywistych.
Wyróżnik funkcji kwadratowej. Wyróżnik funkcji kwadratowej oznaczamy dużą literą grecką Δ i określamy wzorem

$$\Delta = b^2 - 4 * a * c,$$

10.3.1 Równanie kwadratowe

Funkcja kwadratowa ma wartość zero w punkcie x_0, jeżeli x_0 jest rozwiązaniem równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Pierwiastki równania kwadratowego wyznaczamy metodą starożytnych uzupełnienia wyrażenia

$$ax^2 + bx + c$$

do kwadratu.
Mianowicie, wyciągając współczynnik $a \neq 0$ przed nawias otrzymamy

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}).$$

Następnie, dodając i jednocześnie odejmując wyrażenie $(\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ piszemy wyrażenie kwadratowe w postaci kanonicznej

$$ax^2 + bx + c = a(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}} + \underbrace{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}) = a[\underbrace{(x + \frac{b}{2a})^2} - \underbrace{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}]$$

W ten spoób otrzymaliśmy postać kanoniczną funkcji kwadratowej:
Postać kanoniczna funkcji kwadratowej.

$$y = ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}],$$

gdzie wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$.
Pierwiastki równania kwadratowego. Z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej łatwo znajdujemy pierwiastki równania kwadratowego.
Mianowicie, dla wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ możemy różnicę kwadratów napisać w postaci iloczynu

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] &= a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] \\ &= (x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) = 0 \end{aligned}$$

Skąd wynikają wzory na pierwiastki równania kwadratowego

$$x_1 + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0, \qquad \text{lub} \quad x_2 + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

oraz

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \text{lub} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Zauważmy, że w przypadku, gdy wyróżnik $\Delta = 0$, funkcja kwadratowa jest pełnym kwadratem

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2.$$

Wtedy z powyższych wzorów otrzymujemy pierwiastek podwójny

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0, \qquad x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

10.3.2 Wzory Vieta

Pierwiastki równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

spełniają następujące wzory Vieta:
Suma i iloczyn pierwiastków

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 * x_2 = \frac{c}{a}.$$

Istotnie, obliczamy

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Podobnie iloczyn

$$\begin{aligned} x_1 * x_2 &= (\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}) * (\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}) \\ &= (-\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})^2 \\ &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Przykład 10.3 *Znajdź równanie kwadratowe, którego suma pierwiastków równa 3 i iloczyn pierwiastków równy 2.*

Rozwiązanie. Stosując wzory Vieta, piszemy

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3, \qquad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = 2.$$

Skąd znajdujemy

$$b = -3a, \quad c = a.$$

Zatem, mamy rodzinę równań kwadratowych

$$ax^2 - 3ax + a = 0$$

z parametrem $a \neq 0$, których suma pierwiastków równa jest 3, a iloczyn pierwiastków równy jest 2.

Zadanie 10.4 *Znajdź równanie kwadratowe którego suma pierwiastków równa 6 i iloczyn pierwiastków równy 5.*

10.3.3 Rozkład funkcji kwadratowej na czynniki pierwsze

Jeżeli wyróżnik $\Delta < 0$ jest ujemny to równanie kwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wtedy funkcja kwadratowa nie rozkłada się na czyniki liniowe.
W przypadku gdy wyróżnik $\Delta \geq 0$ funkcja kwadratowa rozkłada się na czynniki liniowe. Istotnie, wtedy możemy przedstawić funkcje kwadratową jako różnicę kwadratów

$$ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2]$$

Stosując wzór na różnice kwadratów otrzymamy rozkład funkcji kwadratowej na czynniki liniowe

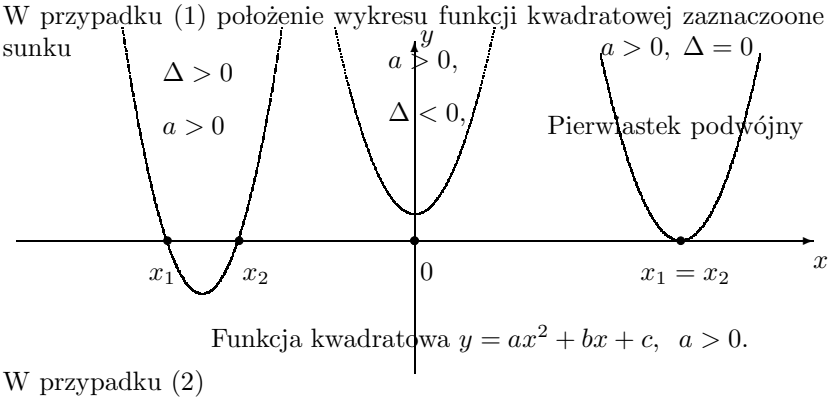
$$ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Położenie funkcji kwadratowej na płaszczyźnie. Położenie wykresu funkcji kwadratowej na płaszczyźnie we współrzędnych (x, y) wyznaczymy w następujących przypadkach:

$$(1) \quad a > 0, \quad \Delta > 0, \quad \Delta = 0, \quad \Delta < 0$$

$$(2) \quad a < 0, \quad \Delta > 0, \quad \Delta = 0, \quad \Delta =< 0.$$

W przypadku (1) położenie wykresu funkcji kwadratowej zaznaczoone jest na niżej na rysunku

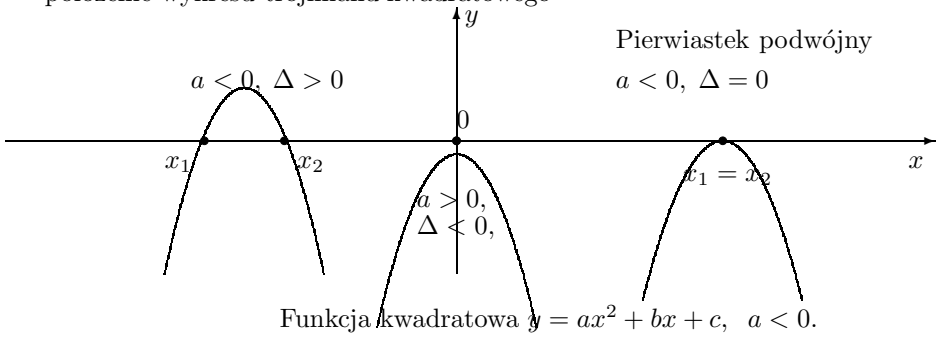


Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c, \;\; a > 0.$

W przypadku (2)

$$a < 0, \;\; \Delta > 0, \quad \Delta = 0, \quad \Delta < 0$$

położenie wykresu trójmianu kwadratowego



Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c, \;\; a < 0.$

Z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej wnioskujemy, że

- funkcja kwadratowa osiąga minimum równe $-\frac{\Delta}{4a}$, jeżeli współczynnik $a > 0$ jest dodatni.
- funkcja kwadratowa osiąga maksimum równe $-\frac{\Delta}{4a}$, jeżeli współczynnik $a < 0$ jest ujemny.

Istotnie, w punkcje minimum lub maksimum $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}$ funkcja kwadratowa osiąga minimum lub maksimum, gdyż wtedy w postaci kanonicznej

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

wyrażenie $(x+\frac{b}{2a})^2=0$ dla $x=-\frac{b}{2a}$, natomiast wartość funkcji $y=-\frac{\Delta}{4a}$.

Przykład 10.4 *Dla danej funkcji kwadratowej*

$$y=2x^2-6x+4$$

wykonaj następujące operacje:

(a) Znajdź mniejsca zerowe funkcji

(b) Rozłóż funkcje na czynniki liniowe

(c) Znajź minimum funkcji

(d) Podaj wykres funkcji

Rozwiązanie. Współczynniki równaia: $a=2,\ b=-6,\ c=4$.
Obliczmy wyróżnik równania

$$\Delta=b^2-4ac=6^2-424=36-32=4>0.$$

(a) Stosując wzory, obliczmy pierwiaski równia

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6-\sqrt{4}}{4}=1,$$
$$x_2=\frac{-b=\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6+\sqrt{4}}{4}=2$$

(b) Według wzoru, funkcja kwadratowa rozkłada się na czynniki liniowe

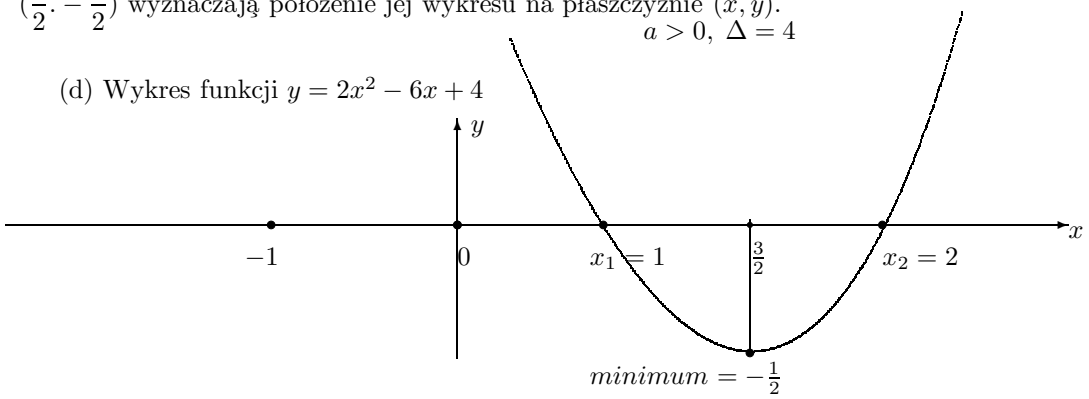
$$y=a(x-x_1)(x-x_2)=2(x-1)(x-2).$$

(c) Ponieważ wyróżnik $\Delta=4>0$ jest dodatni to funkcja kwadratowa ma minimum

$$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{2}$$

w punkcie $(\frac{-b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})=(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$.
Punkty $(1,0)$ i $(2,0)$ w których leżą pierwiastki funkcji kwadratowej i punkt minimum $(\frac{3}{2}.-\frac{1}{2})$ wyznaczają położenie jej wykresu na płaszczyźnie (x,y).

(d) Wykres funkcji $y=2x^2-6x+4$



Funkcja kwadratowa $y=2x^2-6x+4$.

10.3.4 Nierówności kwadratowe

Rozwiązanie nierówności kwadratowych odczytujemy z położenia wykresu funkcji kwadratowej. Mianowicie, mamy następujące przypadki:

1. Dla $a > 0,\ \Delta > 0$ funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c > 0$ jest dodatnia poza pierwiastkami: $x < x_1$ oraz $x > x_2$, natomiast jest ujemna $y = ax^2 + bx + c < 0$ pomiędzy pierwiastkami: $x_1 < x < x_2$.

2. Dla $a < 0,\ \Delta > 0$ funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c > 0$ jest ujemna poza pierwiastkami: $x < x_1$ oraz $x > x_2$, natomiast jest dodatnia $y = ax^2 + bx + c > 0$ pomiędzy pierwiastkami: $x_1 < x < x_2$.

3. Dla $a > 0,\ \Delta \leq 0$ funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c \geq 0$ jest nieujemna na całym zbiorze liczb rzeczywistych dla $-\infty < x < \infty$.

4. Dla $a < 0,\ \Delta \leq 0$ funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c \leq 0$ jest niedodatnia na całym zbiorze liczb rzeczywistych dla $-\infty < x < \infty$.

Przykład 10.5 *Rozwiąż następujące nierówności i znajdź maksimum lub minimum wskazanej funkcji:*

$$(1) \quad x^2 + x + 1 > 0, \qquad y = x^2 + x + 1.$$

$$(2) \quad -2x^2 + 2x - 1 < 0, \quad y = -2x^2 + 2x - 1,$$

$$(3) \quad x^2 - 5x + 6 \geq 0, \qquad y = x^2 - 5x + 6,$$

$$(4) \quad -2x^2 + x + 1 > 0, \quad y = -2x^2 + x + 1.$$

Rozwiązanie, (1). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y = x^2 + x + 1.$$

Współczynniki:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1.$$

Wyróżnik:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 * 1 * 1 = -3.$$

Ponieważ współczynnik $a = 1 > 0$ jest dodatni i wyróżnik $\Delta = -3 < 0$ jest ujemny to nierówność

$$x^2 + x + 1 > 0,$$

jest prawdziwa dla $-\infty < x < \infty$.
Funkcja

$$y = x^2 + x + 1$$

osiąga minimum równe $\frac{3}{4}$ w punkcie $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.
Rozwiązanie, (2). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y = -2x^2 + 2x - 1.$$

Współczynniki: $a = -2,\ b = 2,\ c = -1$.
Wyróżnik: $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 * (-2) * (-1) = -4$.
Ponieważ współczynnik $a = -2 < 0$ jest ujemny i wyróżnik $\Delta = -4 < 0$ jest ujemny to nierówność

$$-2x^2 + 2x - 1 < 0$$

trómia jest prawdziwa dla $-\infty < x < \infty$.
Funkcja $y = -2x^2 + 2x - 1$ osiąga maksimum równe 1 w punkcie $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (\frac{1}{2}, 1)$
Rozwiązanie, (3). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y = x^2 - 5x + 6.$$

Współczynniki: $a = 1,\ b = -5,\ c = 6$.
Wyróżnik: $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 * 1 * 6 = 1$.
Ponieważ wyróżnik $\Delta = 1 > 0,\ \sqrt{1} = 1$ jest dodatni to funkcja ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{2} = 2,\ \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Zatem nierówność

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

jest prawdziwa poza pierwiastkam to znaczy dla $x < 2$ i dla $x > 3$
Funkcja $y = x^2 - 5x + 6$ osiąga minimu równe $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4}$ w punkcie $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (\frac{5}{2}, \frac{-1}{4})$.
Rozwiązanie, (4). Określamy współczynniki i wyróżnik funkcji

$$y = -2x^2 + x + 1,$$

Współczynniki: $a = -2,\ b = 1,\ c = 1$.
Wyróżnik: $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 * (-2) * 1 = 9$.
Ponieważ współczynnik $a = -2 < 0$ wyróżnik $\Delta = 9 > 0,\ \ \sqrt{9} = 3$ jest dodatnia to funkcja

$$y = -2x^2 + 2x - 1,$$

ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{2 * (-2)} = 1,\ \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{2 * (-2)} = -\frac{1}{2}.$$

Zatem nierówność jest prawdziwa pomiędzy pierwiastkami to znaczy dla $-\frac{1}{2} < x < 1$.
Funkcja $y = -2x^2 + x + 1$ osiąga maksimum równe $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{9}{8}$ w punkcie $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{8})$.

Zadanie 10.5 *Rozwiąż następujące nierówności i znajdź maksimum lub minimum wskazanej funkcji:*

(1) $x^2 - x + 1 > 0, \qquad y = x^2 - x + 1.$

(2) $-3x^2 + 6x - 3 \leq 0, \quad y = -3x^2 + 6x - 3.$

(3) $x^2 - x - 2 \geq 0, \qquad y = x^2 - x - 2.$

(4) $-4x^2 + 3x + 1 > 0, \quad y = -4x^2 + 3x + 1.$

Zadanie 10.6 *Dla jakich wartości parametru m funkcja kwadratowa*

$$y = x^2 + 2mx + m + 1$$

jest dodatnia dla wszystkich rzeczywistych wartości $x \in R$.

Przykład 10.6 *Dla trójmianu kwadratowego*

$$y = x^3 - 5x + 6$$

(i) wyprowadź postać kanoniczną trójmianu

(ii) znajdź jego pierwiastki i oblicz minimum trójmianu

(iii) narysuj położenie trójmianu na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Rozwiązanie:
(*i*) Wyróżnik trómianu kwadratowego o współczynnikach $a = 1,\ b - -5,\ c = 6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 41 * 6 = 25 - 24 = 1.$$

Proste przekształcenie tego trójmianu prowdzi do postaci kanonicznej

$$y = x^2 - 5x + 6 = x^2 - 5x + (\frac{-5}{2})^2 + 6 - (\frac{-5}{2})^2 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Skąd postać kanoniczna tego trójmianu

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

(*ii*) Obliczmy pierwiastki trójmianu z postaci kanonicznej lub bezpośrednio ze wzoró. Mianowicie postać kanoniczna jest różnią kwadratów, którą rozkładamy na czynniki

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4} = y = (x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = (x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}).$$

Skąd obliczamy pierwiastki równania kwadratowego

$$(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}) = 0$$
$$(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}) = 0, \qquad lub \qquad (x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}) = 0$$
$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3, \qquad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Łatwo obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego podstawiając do wzorów

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-5}{2} - \frac{\sqrt{1}}{2} = 2, \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-5}{2} + \frac{\sqrt{1}}{2} = 3.$$

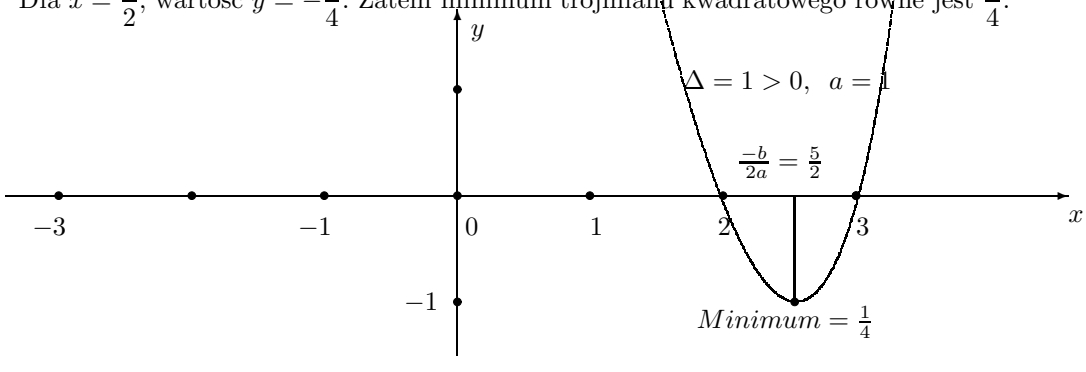
Minimum trójmianu kwadratowego obliczamy bezpośrednio z postaci kanonicznej

$$y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Jasne, że wartość tego trójmianu jest najmniejsza, jeżeli kwadrat

$$(x - \frac{5}{2})^2 = 0.$$

Dla $x = \frac{5}{2}$, wartość $y = -\frac{1}{4}$. Zatem minimum trójmianu kwadratowego równe jest $\frac{1}{4}$.



10.3.5 Przykłady

Przykład 10.7 *Równanie kwadratowe*

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

ma dwa pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2. Korzystając ze wzirów Viete oblicz wartości wyrażeń algebraicznych

$$(x_1 + x_2)^2, \quad x_1^2 + x_2^2, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

Rozwiązanie: współczynniki równania $a = 1,\ b = -4,\ c = 3$
Ze wzorów Viete obliczmy sumę i iloczyn pierwistkoów

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4, \quad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3.$$

Skąd obliczamy wartości wyrażeń algebraicznych

$$(x_1 + x_2)^2 = 4^2 = 16, \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16 - 2 * 3 = 10.$$

oraz

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 * x_2} = \frac{4}{3}.$$

Przykład 10.8 *Dla których wartości parametru m równanie*

$$x^2 - 2x + m = 0$$

ma dwa różne pierwiastki

Rozwiązanie: Równie

$$x^2 - 2x + m = 0$$

ma dwa różne pierwiastki, jeżeli wyróżnik tego równa jest dodatni

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4m > 0,$$
$$4 - 4m > 0, \quad 4m < 4, \quad m < 1.$$

Odpowieć: Równanie $x^2 - 2x + m$ ma dwa różne pierwiastki dla parametru $-\infty < m < 1$

Przykład 10.9 *Wyznacz współczynniki a, b, c równania kwadratowego*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

które posiada dwa rzeczywiste pierwiastki x_1 i x_2 takie, że ich suma i iloczyn są dane

$$x_1 + x_2 = 7, \qquad x_1 * x_2 = 10.$$

Rozwiązanie: Korzystając ze wzorów Viete

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 7, \qquad x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = 10,$$

znajdujemy następujące związki

$$b = -7a, ; \qquad c = 10a.$$

Skąd równanie

$$ax^2 - 7ax + 10a = 0, \quad lub \quad a(x^2 - 7x + 10) = 0$$

spełnia warunki zadania dla każdego $a \neq 0$.

Przykład 10.10 *Wyznacz współczynniki a, b, c równania kwadratowego*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

które posiada dwa rzeczywiste pierwiastki $x_1 = 3$ i $x_2 = 8$

Rozwiązanie: Korzystając ze wzorów Viete

$$x_1 + x_2 = 3 + 8 = 11, \qquad \frac{-b}{a} = 11, \qquad x_1 * x_2 = 3 * 8 = 24, \qquad \frac{c}{a} = 24,$$

znajdujemy następujące związki

$$b = -11a, \qquad c = 24a.$$

Skąd otrzymujemy równanie

$$ax^2 - 11ax + 24a = 0, \quad lub \quad a(x^2 - 11x + 24) = 0$$

które posiada pierwiastki $x_1 = 3$, $x_2 = 8$ dla każdego $a \neq 0$.

10.3.6 Zadania

Zadanie 10.7 *Znajdź pierwiastki równania*

(i)) $x^2 - 3x + 6 = 0$,

(ii) $-2x^2 + 9x - 10 = 0$,

(iii) $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Zadanie 10.8 *Dla których wartości parametru m równanie*

$$-x^2 + 4x + m - 4 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki

Zadanie 10.9 *Dla których wartości zmiennej x trójmian kwadratowy*

$$y = x^2 + 4x + 3$$

jest dodatni.
Oblicz najmniejszą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanie 10.10 *Dla których wartości zmiennej x trójmian kwadratowy*

$$y = -2x^2 + 5x + 3$$

jest ujemny.
Oblicz największą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanie 10.11 *Dla których wartości parametru m trójmian kwadratowy*

$$y = x^2 + 4x + m^2$$

jest dodatni dla wszystkich wartości zmiennej x.
Oblicz najmniejszą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanie 10.12 *Dla których wartości parametru m trójmian kwadratowy*

$$y = -x^2 + 3x - m,$$

jest ujemny dla wszystkich wartości zmiennej x.
Oblicz największą wartość tego trójmianu kwadratowego.

Zadanie 10.13 *Znajdź równanie kwadratowe którego suma pierwiastków równa 6 i iloczyn pierwiastków równy 5.*

10.4 Wielomiany stopia n

Wielomiany mają prostą strukturę i stanowią ważną klasę funkcji w zastosowaniach matematyki. W istocie, wielomianami można approksymować każdą funkcję ciągłą z dowolną dokładnością.

Wielomianem stopnia n z miennej x nazywamy wyrażenie algebraiczne nastepującej postaci:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0.$$

Jeżeli $a_n = 0$ to wielomian jest stopnia niższego niż n

10.4.1 Przykłady wielomianów

Wielomian stopnia $n = 0$ zmiennej x ma wartość stałą równą a_0

$$p_0(x) = a_0 \quad dla\ wszystkich\ wartosci \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia $n = 0$

$$p_0(x) = 8 \quad dla\ wsztstkich \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

ma wartość stałą, $a_0 = 8$ dla wsztykich wartości rzeczywistych x.
Wielomian stopnia $n = 1$ zmiennej x, funkcja liniowa

$$p_1(x) = a_1 x + a_0 \qquad dla\ wszystkich\ wartosci \quad x(-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia $n = 1$

$$p_1(x) = 5x + 7 \qquad dla \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki $a_1 = 5,\ a_0 = 7$.
Wielomian stopnia $n = 2$ zmiennej x, funkcja kwadratowa

$$p_2(x) = a_2 x + a_1 x^2 + a_0 \qquad dlax \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia $n = 2$

$$p_2(x) = 3x^2 + 4x + 5 \qquad dla \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki $a_2 = 3,\ a_1 = 4,\ a_0 = 5$.
Wielomian stopnia $n = 3$ zmiennej x, wielomian kubiczny

$$p_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad dla \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian kubiczny

$$p_3(x) = 2x^3 + 3x^3 + 4x + 5, \quad dla \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki $a_3 = 2,\ a_2 = 3,\ a_1 = 4,\ a_0 = 5$.
Podobnie wielomian stopnia $n = 5$ miennej z,

$$p_5(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad dlax \in (-\infty, \infty).$$

Na przykład wielomian stopnia $n = 5$

$$p_5(z) = 2z^5 - 7z^4 + 5z^2 + 2, \quad dla \quad x \in (-\infty, \infty).$$

ma współczynniki $a_5 = 2,\ a_4 = -7,\ a_3 = 0,\ a_2 = 5,\ a_1 = 0,\ a_0 = 2$.

10.4.2 Operacje arytmetyczne na wielomianach.

Następujące twierdzenie jest prawie oczywiste:

Twierdzenie 10.1 *Zbiór wielomianów stopnia nie większego niż n jest zamknięty ze względu na operacje dodawania i odejmowania.*

Istotnie, rozpatrzmy dwa następujące wielomiany

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

Znajdujemy sumę lub różnicę tych wielomianów przez grupowanie wyrazów przy tej samej potędze

$$p_n(x) \pm q_n(x) = (a_n \pm b_n)x^n + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 \pm b_1)x + (a_0 \pm b_0.)$$

Zauważamy, że w wyniku otrzymamy wielomian stopnia nie większego niż n o współczynnikachch

$$a_n \pm b_n,\ a_{n-1} \pm b_{n-1}, ..., a_1 \pm b_a, a_0 \pm b_0.$$

Zatem, suma lub różnica wielomianów stopnia co najwyżej n jest wielomianem stopnia co najwyżej n. To znaczy, że zbiór wielomianów stopnia co najwyżej n jest zamknięty na operacje dodawania i odejmowania wielomianów stopnia co najwyżej n.

Przykład 10.11 *Dodaj następujące wielomiany*

$$p_4(x) = 3x^4 - 2x^3 + x + 5, \quad q_3(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x + 1,$$

Wykonując dodawanie, otrzymamy wielomian

$$\begin{aligned} r_4(x) &= (3+0)x^4 + (-2+2)x^3 + (0+5)x^2 + (1+2)x + (5+1) \\ &= 3x^4 + 5x^2 + 3x + 6. \end{aligned}$$

stopnia $n = 4$ o współczynnikach $a_4 = 3,\ a_3 = 0,\ a_2 = 5,\ a_1 = 3,\ a_0 = 6.$

10.4.3 Dzielenie wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$

Wielomian $p_n(x)$ stopnia n dzielimy przez dwumian $x - x_0$ stopnia $n = 1$ według schematu dzielenia podanego w następujących przykłady:

Przykład 10.12 *Wykonaj dzielenie:*

$$\begin{array}{ll} (x^3-1) : (x-1) & = \quad x^2 + x + 1 \\ x^3 - x^2 & \\ ---- & \\ x^2 - 1 & \\ x^2 - x & \\ ---- & \\ x - 1 & \\ x - 1 & \\ ---- & \\ 0 & \end{array}$$

Zauważ, że wykonujemy odejmowanie pod kreską.
Zatem wielomian $x^3 - 1$ dzieli się przez dwumian $x - 1$ i wynikiem dzielenia jest trójmian $x^2 + x + 1$.
Sprawdzamy dzielenie wykonując operacje odwrotną do dzielenia, to jest operacje odwrotną, mnożenie

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 - x^2 - 1 = x^3 - 1$$

Istotnie, w wyniku mnożenia dzielnika $x - 1$ przez wynik dzielenia $x^2 + x + 1$ otrzymaliśmy dzielną $x^3 - 1$.

Przykład 10.13 *Wykonaj dzielenie:*

$$\begin{array}{ll} (x^4 - x^3 - x^2 - x - 2) : (x-2) & = \quad x^3 + x^2 + x + 1 \\ x^4 - 2x^3 & \\ ---- & \\ x^3 - x^2 & \\ x^3 - 2x^2 & \\ ---- & \\ x^2 - x & \\ x^2 - 2x & \\ ---- & \\ x - 2 & \\ x - 2 & \\ ---- & \\ 0 & \end{array}$$

Zauważ, że wykonujemy odejmowanie pod kreską.
Zatem wielomian $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ dzieli się przez dwumian $x - 2$ i wynikiem dzielenia, którym jest wielomian $x^3 + x^2 + x + 1$.
Sprawdzamy, że

$$(x-2)(x^3+x^2+x+1) = x^4 + x^3 + x^2 + x - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 2 = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2.$$

Zadanie 10.14 *Wykonaj dzielenie według powyższego schematu:*

$$(x^4 - 1) : (x - 1)$$

10.4.4 Dzielenie wielomianu $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$ z resztą.

Dzielenie wielomianów jest rozszerzeniem algorytmu dzielenia liczb całkowitych. W powyższych przykładach wykonaliśmy dzielenie wielomianu 3-go i 4-go stopnia przez dwumian $x - x_0$ bez reszty, czyli reszta $r = 0$. Jednak nie zawsze tak jest. Naogół wielomiany dzielą się przez dwumian z resztą r.
Ponieważ rozpatrujemy dzielenie wielomianu

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

tylko przez dwumian $x - x_0$ to reszta r jest liczbą, wielomianem stałym stopnia zero.
Podobnie jak przy dzieleniu liczb całkowitych piszemy

$$\frac{p_n(x)}{x - x_0} = q_{n-1}(x) + \frac{r}{x - x_0}, \qquad n \geq 1,$$

gdzie $q_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $n - 1$ i r jest resztą z dzielenia.
Zatem wielomian $p_n(x)$ można zapisać

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0) + r$$

Z powyższej równości wynika wzór na resztę, mianowicie $r = p_n(x_0)$.

Przykład 10.14 *Wykonaj dzielenie*

$$(2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6) : (x - 3)$$

$$\begin{array}{l} (2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6) : (x - 3) \quad = \quad 2x^3 + 9x^2 + 23x + 74 \\ 2x^4 - 6x^3 \\ \quad - - - - - - - \\ \quad\; 9x^3 - 4x^2 \\ \quad\; 9x^3 - 27x^2 \\ \quad\; - - - - \\ \qquad\quad 23x^2 + 5x \\ \qquad\quad 23x^2 - 69x \\ \qquad\quad - - - - - - \\ \qquad\qquad\quad 74x + 6 \\ \qquad\qquad\quad 74x - 222 \\ \qquad\qquad\quad - - - - - \\ \qquad\qquad\qquad\quad 226 \end{array}$$

Odpowiedź: Wielomian $p_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$ podzielony przez dwumian $x - 3$ daje wynik $q_3(x) = 2x^3 + 9x^2 + 23x + 74$ z resztą $r = 226$.
Piszemy

$$\frac{p_4(x)}{x-3} = (2x^3 + 9x^2 + 23x + 74) + \frac{226}{x-3}.$$

lub

$$p_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = (2x^3 + 9x^2 + 23x + 74)(x - 3) + 226.$$

Skąd reszta z dzielenia $r = p_4(3) = 226$.

10.4.5 Pierwiastki wielomianów. Twierdzenie Bezouta

Zera funkcji liniowej czy kwadratowej, czyli wielomianów stopnia pierwszego i stopnia drugiego, łatwo znajdujemy stosując znane wzory podane w poprzednich paragrafach. Znane są również wzory na pierwiastki wielomianów trzeciego stopnia i czwartego stopnia. Wiadomo jednak, że nie istnieją wzory na określenie pierwiastków dowolnego wielomianu stopnia większego lub równego niż 5. Natomiast, wiadome są kryteria znajdowania pierwiastków niektórych wielomianów stopni wyższych. Na przykład wiadomo, że jeżeli jakiś wielomian o współczynnikach całkowitych ma pierwiastki całkowite, wtedy te pierwiastki są dzielnikami jego współczynnika a_0. To kryterium dotyczy tylko wielomianów o współczynnikach całkowitych, które mają pierwiaski też całkowite .
Usasadnienie tego kryterium jest proste. Mianowicie, niech całkowita liczba $x_0 \neq 0$ będzie pierwiastkiem wielomianu $p_n(x)$ stopnia n o współczynnikach też całkowitych. Teraz pokażemy, że x_0 jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.
Zachodzi oczywista następująca równość:

$$p_n(x_0) = 0, \quad \text{oraz} \quad \frac{p_n(x_0)}{x_0} = \underbrace{a_n x_0^{n-1} + a_{n-1} x_0^{n-2} + \cdots + a_1}_{} + \frac{a_0}{x_0} = 0 \tag{10.4}$$

Wyrażenie podkreślone nawiasem $\underbrace{a_n x_0^{n-1} + a_{n-1} x_0^{n-2} + \cdots + a_1}$ jest liczbą całkowitą jako suma iloczynów liczb całkowitych. Z równości (10.4) wynika, że iloraz $\frac{a_0}{x_0}$ też jest liczbą całkowitą, gdyż suma jest zerem. Zatem pierwiastek x_0 jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Przykład 10.15 *Znajdź pierwiastki całkowite wielomianu*

$$p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 6$$

Rozwiązanie. Zera wielomianu $p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 6 = 0$ szukamy wśród dzielników 2 lub 3 współczynnika $a_0 = -6$.
Sprawdzamy czy $x_0 = 2$ jest zerem tego wielomianu

$$p_3(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 6 = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$$

Dzielnik $x_0 = 2$ jest zerem wielomianu $p_4(x)$.
Teraz sprawdzamy czy $x_0 = 3$ jest zerem tego wielomianu

$$p_3(2) = 3^3 - 3^2 + 3 - 6 = 27 - 9 + 3 - 6 = 12 \neq 0$$

Dzielnik $x_0 = 3$ nie jest zerem tego wielomianu.
Zauważmy, że są wielomiany dla których żaden z dzielników współczynnika a_0 nie jest zerem. Na przykład wielomian

$$p_2(x) = x^2 + 2x + 8$$

nie ma zer rzeczywistych, gdyż wyróżnik $\Delta = -28$ jest ujemny.
Podstawową informacją o pierwiastkach wielomianów jest twierdzenie Bezouta.

Twierdzenie 10.2 *Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

wtedy i tylko wtedy gdy ten wielomian dzieli się przez dwumian $x - x_0$.

Dowód. Zauważmy, że twierdzenie Bezouta jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to żeby liczba $x_0 \in R$ była pierwiastkiem wielomianu.
Warunek konieczny znaczy:
Jeżeli wielomian $p_n(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - x_0$ to liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu, to znaczy $p_n(x_0) = 0$ oraz reszta $r = 0$.
Zatem niech wielomian $p_n(x)$ będzie podzielny przez dwumian $x - x_0$ bez reszty. wtedy ten wielomian ma postać

$$p_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x)$$

gdzie $q_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $n - 1$.
Skąd dla $x = x_0$ wynika równość $p_n(x_0) = 0$ i dlatego x_0 jest pierwiastkiem tego wielomianu.
Warunek dostateczny znaczy:
Jeżeli liczba $x_0 \in R$ jest pierwiastekiem wielomian $p_n(x)$ to ten wielomian jest podzielny przez dwumian $x - x_0$ z resztą $r = 0$.
Wiadomo, że dzieląc wielomia $p_n(x)$ przez dwumian $x - x_0$ otrzymamy równość

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0) + r$$

gdzie $q_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $n - 1$.
Ponieważ x_0 jest zerem tego wielomianu, to znaczy $p_n(x_0) = 0$ oraz $p_n(x_0) = r$. Zatem reszta $r = 0$. Wtedy z powyższej równości wynika postać wielomianu

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0)$$

w której jest czynnik $x - x_0$ i dlatego wielomian $p_n(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - x_0$ z resztą $r = 0$.

10.4.6 Rozkład wielomianu na czynniki

Z twierdzenia Bezouta wynika następujący wniosek:
Wniosek. Niech liczby rzeczywiste $x_1, x_2, ..., x_k,\ \ k \leq n$ bedą zerami wielomianu

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

wtedy ten wielomian można zapisać w postaci iloczynu

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k)q_{n-k}(x) \tag{10.5}$$

$n - k$ czynników liniowych $(x - x_i),\ \ i = 1, 2, ..., k,$ i wielomianu $q_{n-k}(x)$ stopnia $n - k$.
Istotnie dla $k = 1$ z tweierdzenia Bezouta wprost wynika iloczyn

$$p_n(x) = (x - x_1)q_{n-1}(x)$$

Stosując powtórnie twierdzenie Bezouta do wielomianu $q_{n-1}(x)$ dla zera x_2 otrzymammy rozkład

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)q_{n-2}(x)$$

Powtarzając zastosowanie twierdzenia Bezouta dla następnych zer wielomianu $p_n(x)$ otrzymamy rozkład (10.5) wielomianu na czynniki liniowe i wielomianu $q_{n-k}(x)$.
Zauważmy, że rozkład wielomianu stopnia $n \geq 1$

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

jest równoważny z rozkładem wielomianu

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

ze współczynnikiem $a_n = 1$, gdyż współczynnik $a_n \neq 0$ zawsze możemy wyciągnąć przed nawias.
Teraz z sformułujemy twierdzenie podstawowe o rozkładzie wielomianu naczynniki nierozkładalne:

Twierdzenie 10.3 *Każdy wielomian*

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad n \geq 1,$$

rozkłada się na czynniki liniowe $x - x_0$ lub czynniki kwadratowe $x^2 + a_1 x + a_0$ z wyróżnikiem $a_1^2 - 4a_0 < 0$ ujemnym. Ten rozkład jest jednoznaczny.

Niżej wyliczmy następujące metody rozkładania wielomianów na czynniki:
Sposoby rozkładania wielomianów na czynniki.

1. Rokład trómianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$
2. Wyciąganie wspólnego czynnika przed nawias
3. Sposób grupowania wyrazów
4. Stosowanie wzorów uproszczonego mnożenia
5. Znajdowanie zer wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Przykład 10.16 *Rozłóż na czynniki wielomian kwadratowy*

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

Rozwiązanie. Wielomian kwadratowy rozkłada się na czynniki w zależności od znaku wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$. Mianowicie, jeżeli wyróżnik $\Delta \geq 0$ jest nieujemny, wtedy ten trójmian ma dwa pierwiastki rzeczywiste i rozkłada się na czynniki

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ten przypadek obejmuje również pierwiastek podwójny kiedy $\Delta = 0$ i $x_1 = x_2$.
Jeżeli wyróżnik $\Delta < 0$ jest ujemny to trójmian $ax^2 + bx + c$ jest nie rozkładalny i wtedy czynnikiem jest wyrażenie $ax^2 + bx + c$.

Przykład 10.17 *Rozłóż na czynniki następujący wielomian przez grupowanie wyrazów i wyciąganie wspólnego czynnika*

$$p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

Rozwiązanie. Stosujemy kombinacje powyższych sposobów. W tym przypadku grupujemy wyrazy pierwszy i drugi oraz trzeci i czwarty potem wyciągającamy przed nawias x^2 oraz 4, w ten sosób otrzymamy

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= x^2(x-2) - 4(x-2) \\ &= (x-2)(x^2-4) \end{aligned}$$

Dalej, stosując wzór na rónicę kwadratów $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ dostajemy rozkład tego wielomianu na czynniki

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= x^2(x-2) - 4(x-2) = (x-2)(x^2-4) \\ &= (x-2)(x-2)(x+2) = (x-2)^2(x+2). \end{aligned}$$

Przykład 10.18 *Rozłóż na czynniki następujący wielomian*

$$p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10$$

Rozwiązanie. Stosujemy kombinacje powyższych sposobów. W tym przypadku wyciągając przed nawias x^2 oraz 5, otrzymamy

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10 &= x^2(x+5) + 2(x+10) \\ &= (x+5)(x^2+2) \end{aligned}$$

Ponieważ wyrażenie kwadratowe $x^2 + 2 > 0$ jest wszędzie dodatnie to rozkład tego wielomianu na czynniki

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 10 &= x^2(x+5) + 2(x+10) \\ &= (x+5)(x^2+2) \end{aligned}$$

zawiera czynnik liniowy $x + 5$ i czynnik kwadradratowy $x^2 + 2$, który jest nie rozkładalny.

Przykład 10.19 *Rozłóż na czynniki następujący wielomian*

$$p_4(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$$

Rozwiązanie. W tym przypadku zer wielomianu o współczynnikach całkowitych szukamy wśród dzielników $-2, -1, 1, 2, 3, 4, 6$ wyrazu wolnego $a_0 = -12$.

1. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = -2$ jest zerem tego wielomianu

$$p_4(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^3 - (-2)^2 + 16(-2) - 12 = 16 + 32 - 4 - 32 - 12 = 0$$

   Zatem $x_0 = -2$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x + 2$.

2. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = -1$ jest zerem tego wielomianu

$$p_4(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 - (-1)^2 + 16(-1) - 12 = 1 + 4 - 1 - 16 - 12 = -32 \neq 0.$$

   Zatem $x_0 = -1$ nie jest zerem tego wielomianu.

3. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = 1$ jest zerem tego wielomianu

$$p_4(1) = (1)^4 - 4(1)^3 - (1)^2 + 16(1) - 12 = 1 - 4 - 1 + 16 - 12 = 0$$

   Zatem $x_0 = 1$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x - 1$.

4. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = 2$ jest zerem tego wielomianu

$$p_4(2) = (2)^4 - 4(2)^3 - (2)^2 + 16(2) - 12 = 16 - 32 - 4 + 32 - 12 = 0$$

   Zatem $x_0 = 2$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x - 2$.

5. Sprawdzamy czy dzielnik $x_0 = 3$ jest zerem tego wielomianu

$$p_4(3) = (3)^4 - 4(3)^3 - (3)^2 + 16(3) - 12 = 81 - 108 - 9 + 48 - 12 = 0$$

   Zatem $x_0 = 3$ jest zerem tego wielomianu i wielomian zawiera czynnik $x - 3$.

Odpowiedź: Rozkład wielomian $p_4(x)$ na czynniki liniowe

$$p_4(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x + 2)(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Zadanie 10.15 *Rozłóż na czynniki następujące wielomiany:*

1. *Trójmian kwadratowy*
$$p_2(x) = 2x^2 + 6x + 4$$

2. *Wielomian*
$$p_3(x) = (x^3 - 8) + (x^2 - 4)$$

3. *Wielomian*
$$p_4(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 6$$

10.4.7 Nierówności wielomianowe

W tematach funkcje liniowe i kwadratowe opisane zostały sposoby rozwiązywania nierówności linowych i kwdratowych. Niżej podamy rozwiązanie nierówności wyższych stopni $n \geq 3$. Rozpatrzmy następują nierówność:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \geq 0 \quad n \geq 1, \quad a_n \neq 0.$$

Rozwiązując powyższą nierówność wykonujemy następujące czynności:

1. Rozkładamy ten wielomian na czynniki

   $$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x), \quad a_n \neq 0.$$

   W powyższym rozkładzie dopuszczamy k pierwiastków rzeczywistych włączając pierwiastki wielokrotne, $x_1, x_2, ..., x_k$. Zauważmy, że jeżeli $k = n$ to wielomian $p_n(x)$ rozkłada sie na czynniki lioniowe i ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste $x_1, x_2, ..., x_n$. Tutaj $q_{n-k}(x)$ jest wielomianem stopnia $n - k$ nie rozkładalnym na czynniki liniowe. To znaczy, że wielomian $q_{n-k}(x)$ zawiera tylko czynniki kwadratowe postaci x^2+bx+c z wyróżnikiem $\Delta = b^2 - 4c < 0$ ujemnym.

2. Zuważamy, że nierówność

   $$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x) \geq 0, \quad a_n \neq 0.$$

   jest równoważna z nierównością

   $$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x) \geq 0, \quad \text{gdy} \quad a_n > 0,$$

   lub z równoważna z nierównością

   $$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)....(x - x_k)q_{n-k}(x) \leq 0, \quad \text{gdy} \quad a_n < 0.$$

   Ponieważ obie strony nierówności zawsze możemy podzielić przez liczbę $a_n \neq 0$ różną od zera zachowując kierunek nierówności gdy liczba $a_n > 0$ jest dodatnia i zmieniając zwrot nierówności gdy liczba $a_n < 0$ jest ujemna.

3. Rozwiązanie odczytujemy z wykresu funkcji

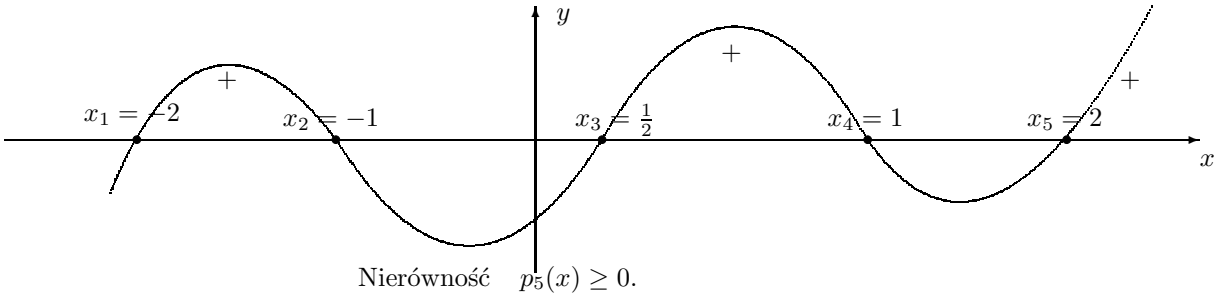
   - Przypadek $a_n > 0$ i wszystkie zera wielomianu $x_1,\ x_2, ..., x_k$ są różne $x_i \neq x_j, \neq j$. Na rysunku przykład nierówności dla wielomianu

     $$p_5(x) = 2x^5 - x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 8x - 4 \geq 0, \quad a_5 = 2 > 0.$$

     Rozkładamy ten wielomian na czynniki. Przez grupowanie wyrazów i wyłąnie przed nawias wpólnych dzielników znajdujemy pierwiastek $\frac{1}{2}$

     $$\begin{aligned} p_5(x) &= 2x^4(x - \tfrac{1}{2} - 5x^2(x - \tfrac{1}{2}) + 4(x - \tfrac{1}{2}) \\ &= p_5(x) = (x + 2)(x + 1)(x - \frac{1}{2})(x - 1)(x - 2) \\ &= (x - \frac{1}{2})(2x^4 - 5x^2 + 4) \\ &= (x - \frac{1}{2})(x - 1)(x + 1(x - 2)(x + 2) \geq 0 \end{aligned}$$

Na wykresie widzimy zera $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = 1,\ x_5 = 2$



Nierówność $p_5(x) \geq 0$.

Z rysunku odczytujemy rozwiązanie, to znaczy, że te przedziały w których wielomian jest nieujemny:
Zatem, nierówność ta jest prawdziwa dla $x \in [-2, -1] \cup [\frac{1}{2}, 1] \cup [2, \infty]$

- Przypadek $a_n < 0$ i wszystkie zera wielomianu $x_1,\ x_2, ..., x_k$ są różne $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.
  Na rysunku przykład nierówności dla wielomianu

$$p_5(x) = -2x^5 + x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 8x + 4 \geq 0, \quad a_5 = -2 < 0.$$

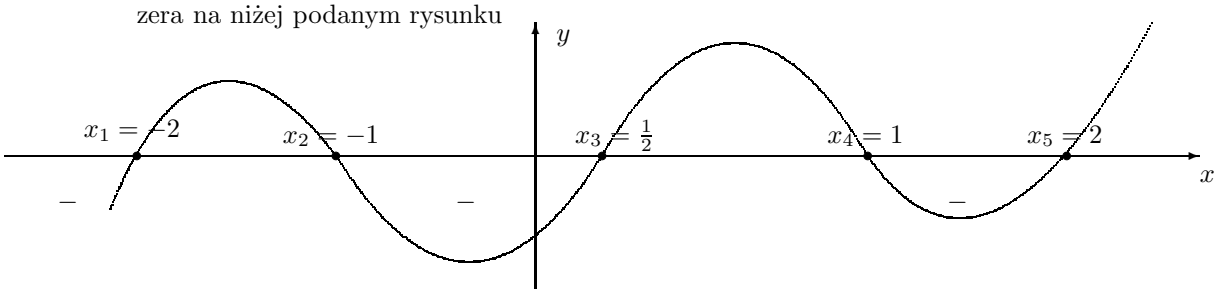
  Rozkładamy ten wielomian na czynniki

$$p_5(x) = -2(x+2)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2) \geq 0$$

  Dzieląc obie strony tej nierówności przez -2, otrzymamy nierówność przeciwną równoważną

$$p_5(x) = (x+2)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2) \leq 0$$

  Odczytujemy zera $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = 1,\ x_5 = 2$ i zaznaczmy te zera na niżej podanym rysunku



Nierówność dla wielomianu $p_5(x) \leq 0$.

Z rysunku odczytujemy rozwiązanie to znaczy, że te przedziały w których wielomian jest niedodatni:
Zatem nierówność ta jest prawdziwa dla $x \in [-\infty, -2] \cup [-1, \frac{1}{2}] \cup [1, 2]$.

- Przypadek gdy wielomian ma wielokrotne zera. Wtedy wykres wielomianu nie przecina osi x, jeżeli krotność jest parzysta $2, 4, 6...$;
  Natomiast, jeżeli krotność jest nie parzysta to wykres wielomianu przcina oś x.

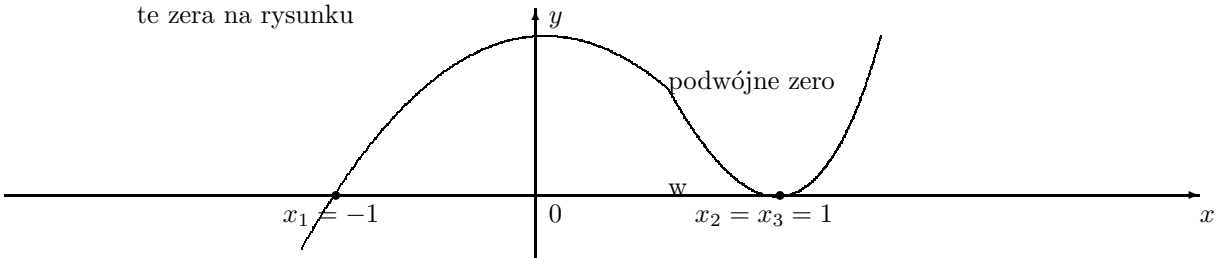
Przypadek wielokrotnych zer wyjaśnimy na następującym przykładzie:
Rozwiąż nierówność:

$$p_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \geq 0$$

Rozkładamy ten wielomian na czynniki

$$p_3(x) = (x-1)(x+1)^2 \geq 0$$

Następnie odczytujemy zera $x_1 = -1$, oraz powdwójne zero $x_2 = 1$. Zaznaczmy te zera na rysunku



Nierówność dla wielomianu $p_3(x) \geq 0$. Zero podwójne w punkcie $x = 1$.

Z rysunku odczytujemy rozwiązanie to znaczy, że te przedziały w których wielomian jest nieujemny:
Zatem nierówność ta jest prawdziwa dla $x \in [-1, \infty]$

10.5 Zadania

Zadanie 10.16 *Rozwiąż nikerṕwność*

$$p_3x) = x^3 - x^2 + 4 \geq 0$$

Zaznacz na wykresie przedziały w których ta nierówność jest prawdziwa.

Zadanie 10.17 *Rozwiąż nikerṕwność*

$$p_3x) = x^3 - 1 \leq 0$$

Zaznacz na wykresie przedziały w których ta nierówność jest prawdziwa.

Chapter 11

Wzory uproszczonego mnożenia i dwumian Newtona

11.1 Dwumiany i sześciany

1. **Dwumian, dwumian kwadratowy sześcian sumy.** Łatwo sprawdzamy następujące tożsamości [1]

$$\begin{array}{lcll} (a \pm b)^1 & = & a \pm b, & \textit{dwumian stopnia } n = 1 \\ (a \pm b)^2 & = & a^2 \pm 2\, a\, b + b^2, & \textit{dwumian kwadratowy } n = 2 \\ (a \pm b)^3 & = & a^3 - 3\, a^2 * b + 3 * a * b^2 \pm b^3, & \textit{wielomian kubiczny } n = 3 \end{array}$$

Wzory na kwadrat sumy lub różnicy otrzymujemy przez mnożenie dwumianu $a \pm b$ przez siebie.
Mianowicie, obliczmy

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^2 = (a+b)(a+b) & = & a(a+b) + b(a+b) \\ & = & a^2 + ab + ba + b^2 \\ & = & a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 = (a-b)(a-b) & = & a(a-b) - b(a-b) \\ & = & a^2 - ab - ba + b^2 \\ & = & a^2 - 2ab + b^2, \end{array}$$

Przykład 11.1 *Dla ustalonej liczby naturalnnej n znajdź naturalne liczby a i b takie że*

$$n + a^2 = b^2$$

Rozwiązanie
Przenosząc a^2 na prawą stronę ze znakiem przeciwnym otrzymamy

$$n = b^2 - a^2$$

[1] Tożsamością nazywamy równość, która jest prawdziwa dla wszystkich wartości parametrów

Ponieważ

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$$

to

$$n = (b-a)(b+a)$$

Następnie rozkładamy daną liczbę n iloczyn

$$n = 1 * n$$

Przyjmując

$$b - a = 1 \quad i \quad b + a = n$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{n-1}{2} \quad i \quad b = \frac{n+1}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$(\frac{n+1}{2})^2 - (\frac{n-1}{2})^2 = n$$

Natępnie, jeżeli n ma czennik $p > 1 \;\; i \;\; p < n$ to rozkładamy liczbę n na iloczyn

$$n = p * q$$

Przyjmując

$$b - a = p \quad i \quad b + a = q$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{q-p}{2} \quad i \quad b = \frac{p+q}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$(\frac{p+q}{2})^2 - (\frac{q-p}{2})^2 = p * q = n$$

Natępnie, jeżeli n ma inny czynnik czennik $p_1 > p \;\; i \;\; p_1 < n$ to rozkładamy liczbę n na iloczyn

$$n = p_1 * q_1$$

Przyjmując

$$b - a = p_1 \quad i \quad b + a = q_1$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{p_1 - q_1}{2} \quad i \quad b = \frac{p_1 + q_1}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$(\frac{p_1 + q_1}{2})^2 - (\frac{p_1 - q_1}{2})^2 = p_1 * q_1 = n$$

Ogólnie rozkładamy liczbę n na m czynników pierwszych

$$n = p_0 * p_1 * p_2 * \cdots * p_m, \qquad p_0 = 1$$

i stosując powyższy rozkład na iloczyn

$$n = p_k * q_k$$

obliczamy rozwiązanie

$$a = \frac{p_k - q_k}{2} \quad i \quad b = \frac{p_k + q_k}{2}$$

Sprawdzamy, że

$$(\frac{p_k+q_k}{2})^2-(\frac{p_k-q_k}{2})^2=p_k*q_k=n$$

dla $k=0,1,2,3,...,m$
W ten sposób otrzymujemy wszystkie $m+1$ rozwiązań naturalnych.

Przykład 11.2 *Niech $n=15$. Wtedy mamy rozkład na iloczyn*

$$15=1*15 \quad lub \quad p=3*5$$

Zatem mamy pierwsze rozwiązanie dla $p=1$ i $q=15$

$$b=\frac{15+1}{2}=8 \quad i \quad a=\frac{15-1}{2}=7$$

Sprawdazmy, że

$$b^2-a^2=(\frac{15+1}{2})^2-(\frac{15-1}{2})^2=64-49=15$$

Następnie dla rozkładu

$$15=3*5$$

przyjmujemy $p_1=3$ i $q_1=5$.
Wtedy mamy

$$b+a=5 \quad i \quad b-a=3$$

Skąd otrzymujemy drugie rozwiązanie

$$b=\frac{5+3}{2}=4 \quad i \quad a=\frac{5-3}{2}=1$$

Sprawdzamy, że

$$b^2-a^2=(\frac{5+3}{2})^2-(\frac{5-3}{2})^2=16-1=15$$

2.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \qquad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Podobnie sprawdzamy sześcian sumy lub różnicy.
Mianowicie, obliczmy

$$\begin{aligned}
(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2 &= a(a+b)^2+b(a+b)^2\\
&= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\\
&= (a^3+2a^2b+ab^2)+(ba^2+2ab^2+b^3)\\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\
(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2 &= a(a-b)^2-b(a-b)^2\\
&= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)\\
&= (a^3-2a^2b+ab^2)-(ba^2-2ab^2+b^3)\\
&= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,
\end{aligned}$$

3. **Suma kwadratów.**
   Suma kwadratów dwóch liczb rzeczywistych różnych od zera jest dodatnia i równa się zero wtedy i tylko wtedy, gdy obie liczby są równe zero.
   Mianowicie, piszemy

$$a^2 + b^2 > 0, \quad gdy \quad a \neq 0 \ \ lub \ \ b \neq 0,$$

$$a^2 + b^2 = 0, \quad gdy \quad a = 0 \ \ i \ \ b = 0.$$

4. **Różnica kwadratów.**
   Różnica kwadratów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na czynniki liniowe. Mianowicie, mamy

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

   Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$(a - b)(a + b) = a(a + b) - b(a + b) = (a^2 + ab) - (ba + b^2) = a^2 - b^2.$$

5. **Suma sześcianów.**
   Suma sześcianów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na iloczyn

$$a^3 + b^3 = (a + b))(a^2 - ab + b^2).$$

   Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$\begin{aligned}(a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2) \\ &= (a^3 - a^2b + ab^2) + (ba^2 - ab^2 + b^3) = a^3 + b^3.\end{aligned}$$

6. **Różnica sześcianów.**
   Różnica sześcianów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na iloczyn

$$a^3 - b^3 = (a - b))(a^2 + ab + b^2).$$

   Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$\begin{aligned}(a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a^3 + a^2b + ab^2) - (ba^2 + ab^2 + b^3) = a^3 - b^3.\end{aligned}$$

11.1.1 Przykłady

Przykład 11.3 *Wykonaj działanie*

$$\begin{aligned}&(i) \quad (2a + 3)^2, \qquad (ii) \qquad (\frac{x}{2} - 4)^2, \\ &(ii) \quad (3a + 2)^3, \qquad (iv) \qquad (2x - 3y)^3,\end{aligned}$$

Rozwiązanie. Stosując wzory, obliczamy

$$\begin{aligned}ad.(i) \quad (2a + 3)^2 &= (2a)^2 + 2(2a)3 + 3^2 = 4a^2 + 12a + 9. \\ sd.(ii) \quad (\frac{x}{2} - 4)^2 &= (\frac{x}{2})^2 - 2(\frac{x}{2})(-4) + (-4)^2 \\ &= \frac{x^2}{4} - 4x + 16.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ad.(iii) \qquad (3a+2)^3 &= (3a)^3 + 3(3a)^2 2 + 3(3a)2^2 + 2^3 \\
&= 27a^3 + 54a^2 + 36a + 27. \\
ad.(iv) \qquad (2x-3y)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(-3y)^2 - (3y)^3 \\
&= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3.
\end{aligned}
$$

Zadanie 11.1 *Wykonaj działania*

$$
\begin{array}{llll}
(i) & \dfrac{(5a+2)^2}{(2a-3)^2}, & (ii) & (\dfrac{x^2}{3}-1)^2, \\
(ii) & (3a+2)^3, & (iv) & (\dfrac{3x-2y}{2x+3y})^3,
\end{array}
$$

Zadanie 11.2 *Uprość wyrażenie*

$$
\begin{array}{ll}
(i) & \dfrac{(a^2+b^2)(a^3-b^3)(a^3+b^3)}{[(a+b)^2+(a-b)^2](a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)} \\
(ii) & \dfrac{1+x+x^2+x^3}{1+x^2}
\end{array}
$$

11.2 Dwumian Newtona (1642-1727).

Jednym z najważniejszych i szeroko stosowanym wzorów jest *Dwumian Newtona:*

$$
(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n\, b^0 + \binom{n}{1} a^n\, b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1\, b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0\, b^n \quad (11.1)
$$

Dwumian Newtona piszemy również w Σ (sigma) notacji

$$
(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \quad (11.2)
$$

Napiszmy Dwumian Newtona dla $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}b^k = a+b, && n=1 \\
(a+b)^2 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k}b^k = a^2+2ab+b^2, && n=2 \\
(a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k}b^k = a^3+3a^2\,b+3ab^2+b^3, && n=3 \\
(a+b)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k}b^k = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4, && n=4 \\
(a+b)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k}b^k = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5, && n=5
\end{aligned}
$$

Własności współczynników Newtona $\binom{n}{k}$.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$

2. Symetria współczynników Newtona

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Istotnie, obliczamy, że

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

3. Suma współczynników Newtona

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{array}{rcccl} \binom{n}{k} & = & \frac{n!}{k!(n-k)!} & = & \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{k+1}{n-k} \\ \binom{n}{k+1} & = & \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} & & \end{array}$$

Sumując stronami powyższe równości, otrzymamy

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{k+1}{n-k} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * (\frac{k+1}{n-k} + 1) \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{n+1}{n-k} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

4. Suma współczynników dwumianu Newtona

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Sprawdzamy

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

11.3 Trójkąt Pascala (1623-1662).

Trójkąt Pascala tworzą współczynnniki dwumianu Newtona.

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
(a+b)^0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & & & & & \\
(a+b)^1 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
(a+b)^2 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
(a+b)^3 & \cdots & & \cdots & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
(a+b)^4 & \cdots & & \cdots & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
(a+b)^5 & \cdots & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
(a+b)^6 & \cdots & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
(a+b)^7 & \binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

Obliczając wartości współczynników dwumianu Newtona ze wzoru

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

które podane są niżej w tabeli

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
(a+b)^0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
(a+b)^1 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 1 & & 1 & & \\
(a+b)^2 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 1 & & 2 & & 1 & \\
(a+b)^3 & \cdots & & \cdots & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
(a+b)^4 & \cdots & & \cdots & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
(a+b)^5 & \cdots & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

Własności współczynników Newtona można łatwo odczytać z powyższych tabeli. Mianowicie, własność 1

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

jest widoczna, ponieważ skrajne wartości w każdym wierszy równają się 1. Również jest widoczna w tabeli własność 2, symetria

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Tabelę wartości współczynników Newtona w $n-tym$ wierszu tworzymay stosując własność 3, to jest wzór.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Na przykład, z wartości już obliczonych w wierszu $n-1$ obliczmy wartości w wierszu n, jak niżej

$$
\begin{array}{llcccc}
n=1, & k=0, & \binom{1}{0}+\binom{1}{1} & = & 1+1=2 & = \binom{2}{1} \\
n=2, & k=0, & \binom{2}{0}+\binom{2}{1} & = & 1+2=3 & = \binom{3}{1} \\
n=2, & k=1, & \binom{2}{1}+\binom{2}{2} & = & 2+1=3 & = \binom{3}{2}
\end{array}
$$

11.3.1 Zadania

Zadanie 11.3 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $x = 2$

$$(i) \quad (x+3)^2, \qquad (ii) \quad (x+3)^3,$$
$$(iii) \quad (x-3)^2, \qquad (iv) \quad (x-3)^3.$$

Zadanie 11.4 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla* $a = 3$

$$(i) \quad (a+1)^4, \qquad (ii) \quad (a-1)^4,$$
$$(iii) \quad (a+2)^5, \qquad (iv) \quad (a-2)^5.$$

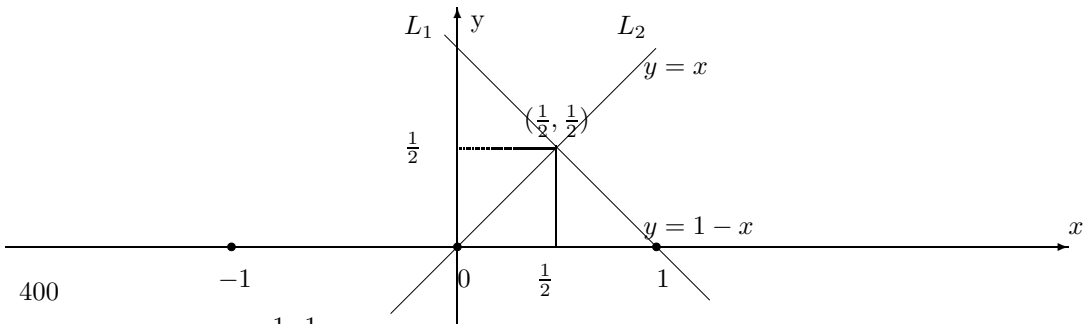
Zadanie 11.5 *Oblicz wyrażenie ze współczynnikami Newtona*

$$(i) \quad \binom{5}{4}, \qquad (ii) \quad \binom{7}{5},$$
$$(iii) \quad \binom{5}{4} + \binom{6}{5}, \qquad (iv) \quad \binom{7}{6} + \binom{8}{7},$$

Chapter 12

Funkcje liniowe

12.1 Proste na płaszczyźnie



Punkt przecięcia $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *prostych prostopadłych:* $L_1 : \ y = 1 - x, \ L_2 : \ y = x$

Położenie figur geometrycznych i ich kształt, w tym położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej są wyznaczane we współrzędnych x, y.
Proste na płaszczyźnie kartezjańskiej określamy przez równania liniowe, które ustalają zależność współrzędnej y od współrzędnej x punktów leżących na prostych.
Rozpatrzymy następujące cztery formy równań prostych:
• Równanie prostej w postaci funkcji liniowej
• Równanie prostej przechodzej przez dwa punkty
• Równanie ogólne prostej.
• Równanie parametryczne prostej

12.2 Funkcja liniowa.

Zależność liniową

$$y(x) = a\,x + b, \tag{12.1}$$

współrzęnej y od współrzędnej x nazywamy funkcją liniową o współczynnikach a i b oraz zmiennej x.
Funkcją $y(x) = a\,x + b$ jest liniowa, gdyż jej wykresem jest linia prosta o współczynniku kierunkowym a i wyrazie wolnym b.
Równania prostej określonej przez funkcje liniową

$$y(x) = ax + b$$

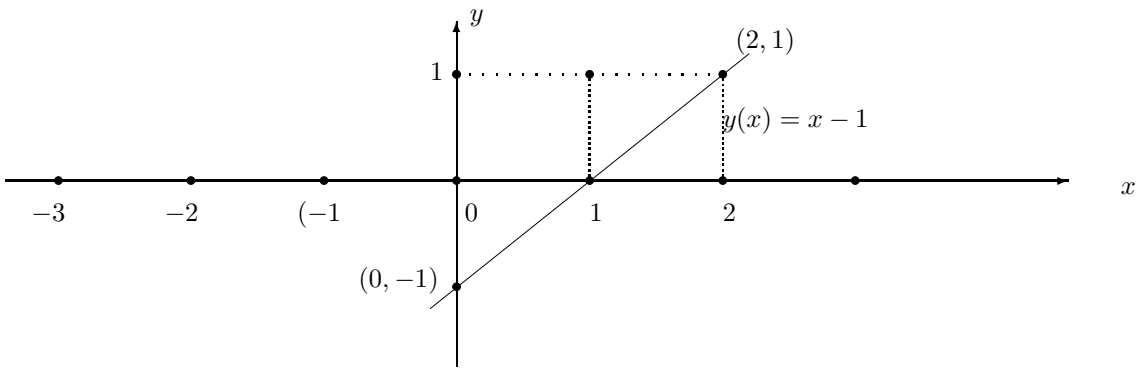
nie obejmuje prostych równoległych do osi y.

Przykład 12.1 .
(*i*) *Narysuj linię prostą na płaszczyźnie, w układzie współrzędnych* x, y, *przechodzącą przez dwa punkty* $(0, -1)$ *i* $(2, 1)$
(*ii*) *Oblicz współczynniki funkcji liniowej*

$$y(x) = ax + b,$$

przechodzącej przez punkty $(0, -1)$ *i* $(2, 1)$

Rozwiązanie (*i*)



Wykres funkcji liniowej $y(x) = x - 1$, *w układzie współrzędnych* x, y

Rozwiązanie (*ii*)
Wykres funkcji $y(x) = ax + b$ przechodzi przez punkty $(0, -1)$, $(2, 1)$, jeżeli

$$y(0) = -1, \quad y(2) = 1.$$

Wtedy współrzędne tych punktów spełniają równania

$$\begin{aligned} y(0) = a * 0 + b = -1, \quad & b = -1, \\ y(2) = a * 2 + b = 1, \quad & a * 2 - 1 = 1, \\ 2 * a = 2, \quad & a = 1 \end{aligned}$$

Skąd otrzymujemy równanie prostej

$$y(x) = x - 1$$

w formie funkcji liniowej o współczynnikach $a = 1$, $b = -1$, na której leżą dane punkty $(0, -1)$ i $(2, 1)$.

Przykład 12.2 .
(*i*) *Sprawdź, które z punktów*

$$\begin{aligned} P_1 = (0, 0), \quad & P_2 = (1, 1), \\ P_3 = (0, 1), \quad & P_4 = (1, 0) \end{aligned}$$

leżą na prostych L_1 lub L_2 o równaniach

$$L_1: \quad y_1(x) = x, \qquad L_2: \quad y_2(x) = 1 - x. \tag{12.2}$$

(*ii*) *Znajdź punkt przecięcia prostych L_1, L_2. Podaj wykres tych prostych.*

Rozwiązanie (*i*). Punkty $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,1)$ leżą na prostej L_1, ponieważ ich współrzędne spełniają równanie prostej $L_1: \ y = x$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

Punkty $P_3 = (0,1)$, $P_2 = (1,0)$ leżą na prostej L_2 ponieważ ich współrzędne spełniają równanie prostej $L_2: \ y = 1 - x$,

$$y(0) = 1 - 0 = 1, \quad y(1) = 1 - 1 = 0.$$

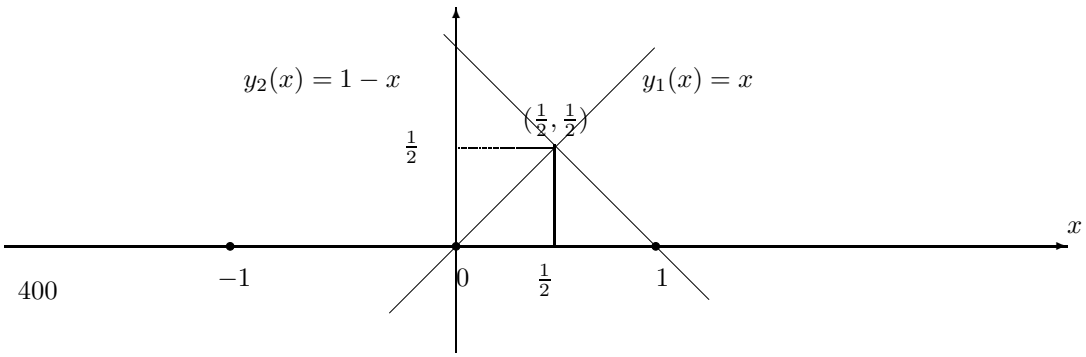
Rozwiązanie (*ii*).
Punkt przecięcia (x_0, y_0) leży na obu prostych, jeżeli

$$y_1(x_0) = y_0, \quad i \quad y_2(x_0) = y_0.$$

Wtedy mamy równania

$$\begin{aligned} &y_1(x_0) = x_0 = y_0 \quad i \quad y_2(x_0) = 1 - x_0 = y_0, \\ &x_0 = 1 - x_0 \qquad\qquad i \quad 2x_0 = 1, \\ &x_0 = \frac{1}{2} \qquad\qquad i \quad y_0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Proste $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = 1 - x$ przecinają się w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Punkt przeciecia prostych prostopadlych: $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = 1 - x.$

12.3 Równania prostych równoległych

Rozpatrzmy dwie proste L_1 i L_2 o równaniach [1]

$$\begin{aligned} L_1: \quad & y = a_1 x + b_1, \\ L_2: \quad & y = a_2 x + b_2. \end{aligned} \tag{12.3}$$

[1] Dalej używamy uproszczonych oznaczeń y zamiast $y(x)$

Warunek konieczny i dostateczny.
Proste L_1 i L_2 o równananiach (12.3) są równoległe, wtedy i tylko wtedy, jeżeli współczynniki $a_1,\ a_2$ są równe $a_1 = a_2$

Przykład 12.3 *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad y = x + 1, \\ L_2: &\quad y = x - 1 \end{aligned} \tag{12.4}$$

są równoległe.
Podaj wykresy prostej L_1 i L_2.

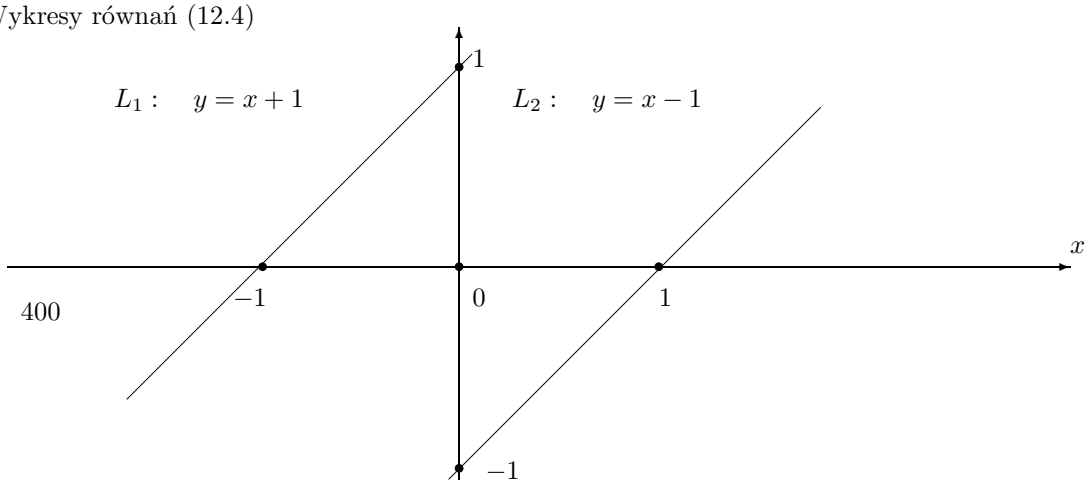
Rozwiązanie.
Proste L_1 i L_2 o współczynnikach

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad b_1 = 1, \\ a_2 &= 1, \quad b_2 = -1 \end{aligned}$$

są równoległe ponieważ ich współczynniki a_1, a_2 spełją warunek konieczny i dostateczny równoległości prostych na płaszczyźnie.

$$a_1 = a_2 = 1.$$

Wykresy równań (12.4)



Przykład 12.4 *Wyznacz równanie prostej L równoległej do prostej*

$$L_0: \quad y = x + 1$$

przechodzącej przez punkt

$$P = (3, 1).$$

Podaj wykres prostej L_0 i prostej L.

Rozwiązanie.
Prosta L równoległa do prostej L_0 ma współczynnik kierunkowy ten sam co prosta L_0, mianowicie $a = 1$.
Wtedy równanie prostej

$$L: \quad y = x + b.$$

Ponieważ prosta L przechodzi przez punkt $P = (3, 1)$ to po podstawieniu współrzędnych punktku otrzymamy równanie

$$1 = 3 + b,$$

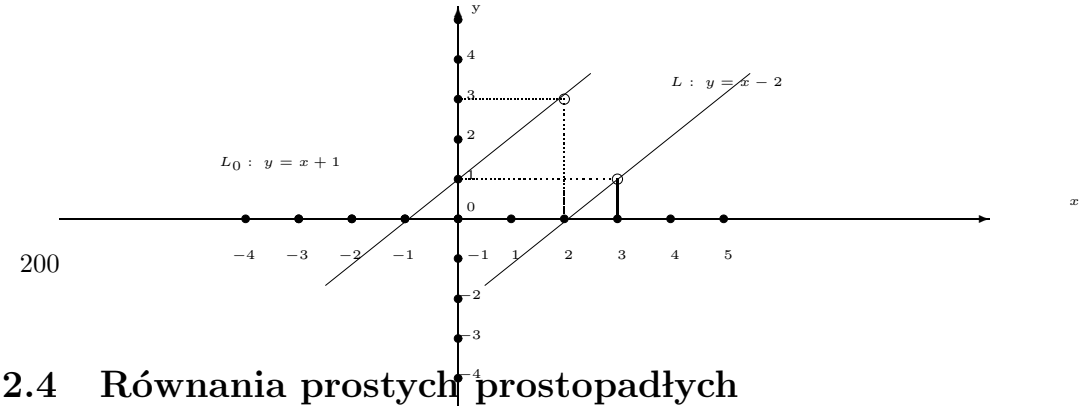
z którego obliczamy wyraz wolny

$$b = 1 - 3 = -2.$$

Skąd otrzymujemy równanie prostej

$$L: \quad y = x - 2.$$

Wykres prostych równoległych $L_0: \ y = x + 1, \quad L: \ y = x - 2$



200

12.4 Równania prostych prostopadłych

Rozpatrzmy dwie proste L_1 i L_2 o równaniach

$$\begin{aligned} L_1: &\quad y = a_1 x + b_1, \\ L_2: &\quad y = a_2 x + b_2. \end{aligned} \tag{12.5}$$

Warunek konieczny i dostateczny.
Prosta L_1 jest prostpadła do prostej L_2, wtedy i tylko wtedy, jeżeli współczynnik a_2 prostej L_2 równy jest negatywnej odwrotności współczynnika a_1 prostej L_1

$$a_2 = -\frac{1}{a_1}.$$

Wtedy każda prosta o równaniu

$$y = -\frac{1}{a_1} x + b \tag{12.6}$$

jest prostopadała do prostej L_1 dla dowolnej wartości wyrazu wolnego b.

Przykład 12.5 *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad y = x - 1, \\ L_2: &\quad y = 1 - x \end{aligned} \tag{12.7}$$

są prostopadłe.
Podaj wykresy prostej L_1 i L_2.

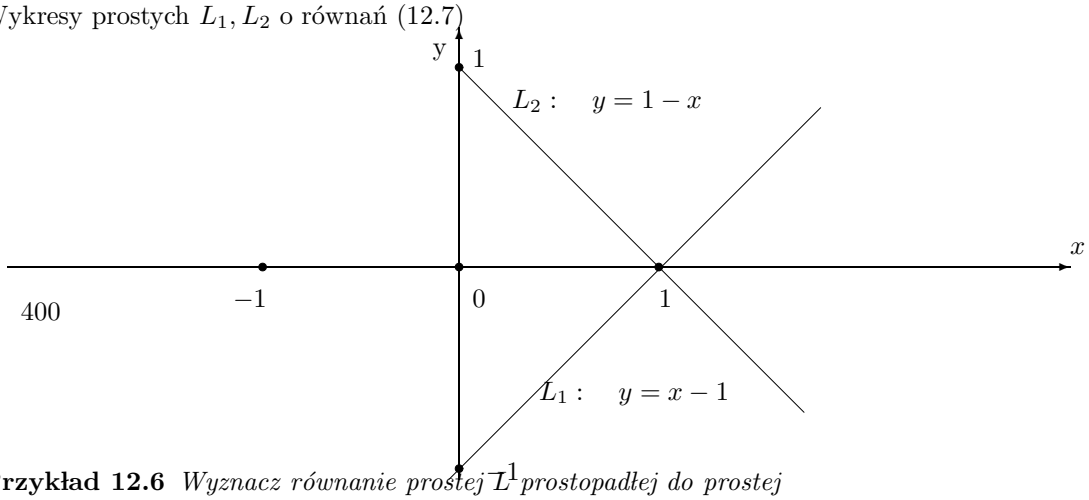
Rozwiązanie.
Proste L_1 i L_2 o współczynnikach

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1, & b_1 = 1, \\ a_2 = -1, & b_2 = 1 \end{array}$$

są prostopadłe ponieważ ich współczynniki a_1, a_2 spełniają warunek konieczny i dostateczny (12.6) prostopadłości prostych na płaszczyźnie.

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} = -\frac{(1)}{1} = -1.$$

Wykresy prostych L_1, L_2 o równań (12.7)



Przykład 12.6 *Wyznacz równanie prostej L prostopadłej do prostej*

$$L_0: \quad y = x + 2$$

przechodzącej przez punkt

$$P = (2, -2).$$

Podaj wykres prostej L_0 i prostej L.

Rozwiązanie.
Prosta L prostopadła do prostej L_0 ma współczynnik kierunkowy równy negatywnej odwrotności współczynnika $a = 1$ prostej L_0.
Wtedy równanie prostej

$$L: \quad y = -\frac{1}{(1)}x + b = b - x.$$

Ponieważ prosta L przechodzi przez punkt $P = (2, 0)$ to współrzędne tego punktu spełniają równanie

$$0 = 2 + b$$

z którego obliczmay wyraz wolny

$$b = 2$$

Skąd otrzymujemy równanie prostej

$$L: \quad y = 2 - x$$

Zadanie 12.1 *Podaj wykres prostej prostopadłej L_0 o równaniu $y = x + 2$ do prostej L o równaniu $y = x - 2$.*

12.5 Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

[2] Równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty nie obejmuje prostych prostopadłych do osi x.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa różne punkty o współrzędnych

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \qquad dla \qquad x_0 \neq x_1$$

piszemy jako następującą zależność współrzędnej y od współrzędnej x:

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \tag{12.8}$$

Istotnie, gdy $x = x_0$ to $y = y_0$ lub gdy $x = x_1$ to $y = y_1$.
To znaczy, że punkty $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1)$ leżą na prostej.

Przykład 12.7 *Napisz równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty*

$$(x_0, y_0) = (-1, 0) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1).$$

Sprawdź, który z punktów $(1, 1),\ (1, 2)$ *leży na prostej.*

Rozwiązanie:
Piszemy równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$(x_0, y_0) = (-1, 0) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1)$$

podstwiając do wzoru (12.8) ich współrzędne znajdujemy równanie prostej

$$\begin{aligned} y &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \\ &= \frac{x - 0}{-1 - 0} * 0 + \frac{x + 1}{0 + 1} * 1 \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Równanie prostej przechodzącej przez punkty $(-1, 0)$ i $(0, 1)$

$$y = x + 1$$

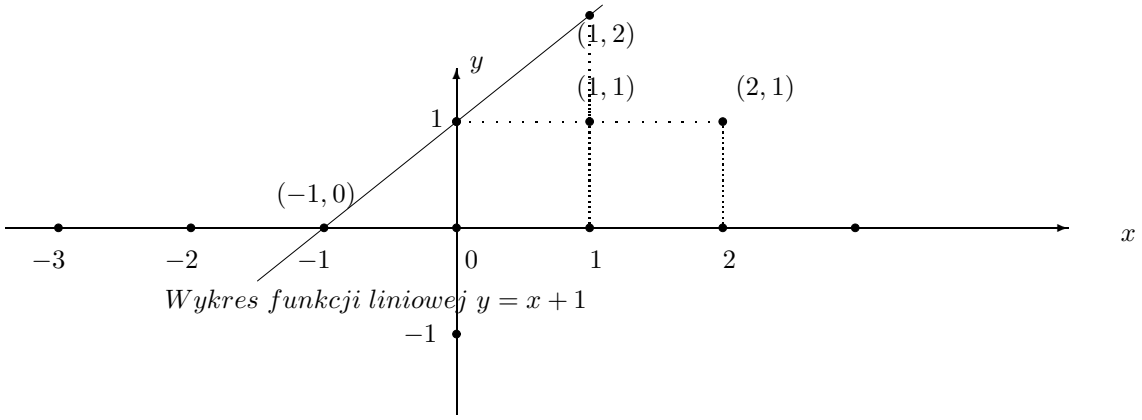
Punkt $(1, 1)$ nie leży na prostej $y = x + 1$ ponieważ jego współrzędne nie spełniają równania tej prostej bo

$$1 \neq 1 + 1$$

Natomiast punkt $(1, 2)$ leży na prostej $y = x + 1$ ponieważ jego współrzędne spełniają równanie tej prostej bo

$$2 = 1 + 1$$

[2] Tutaj używamy uproszczonych oznaczeń $y = y(x),\ y_0 = y(x_0),\ y_1 = y(x_1)$



Wykres funkcji liniowej $y = x + 1$

Zauważmy, że równania prostej określonej przez funkcje liniową

$$y(x) = ax + b$$

lub prostej wyznaczonej przez dwa różne punkty nie obojmują położenia prostych prostopadłych do osi x. Natomiast równanie ogólne prostej, które obejmuje wszystkie możliwe położenia prostej na płaszczyźnie rozpatrujemy w następnej sekcji.

12.6 Równanie ogólne prostej na płaszczyźnie

Ogólne równanie prostej na płaszczyźnie

$$ax + by + c = 0, \qquad a^2 + b^2 > 0, \tag{12.9}$$

gdzie współczynniki a, b nie znikają jednocześnie dla $a^2 + b^2 > 0$.

Przykład 12.8 *współczynniki równania*

$$x + y - 1 = 0$$

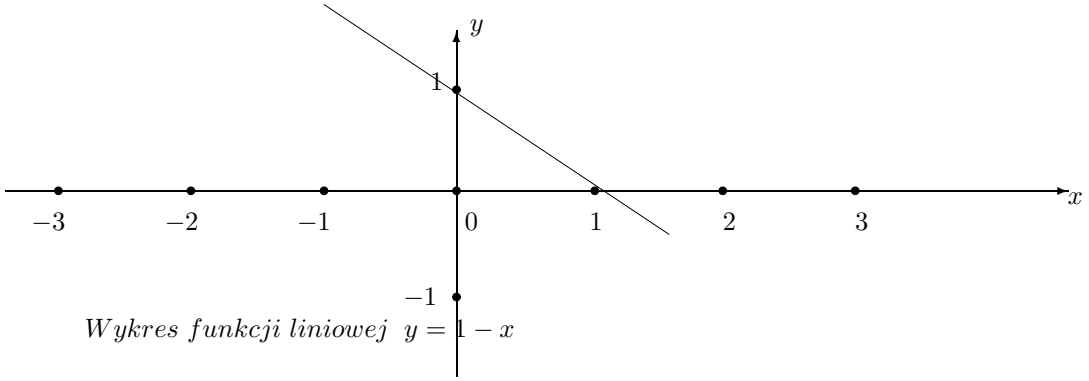
$a = 1,\ b = 1,\ c = -1$ *nie znikają jednocześnie*

$$a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 2 > 0.$$

Równanie tej prostej możemy napisać w postaci funkcji liniowej

$$y = 1 - x$$

której wykres podajemy niżej



Wykres funkcji liniowej $y = 1 - x$

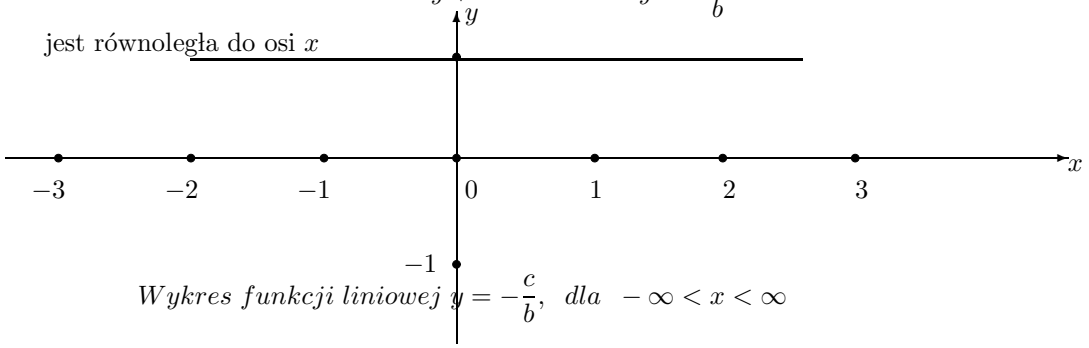
Rozpatrzmy trzy pozycje położenia prostej L o równaniu

$$ax + by + c = 0, \qquad a^2 + b^2 > 0$$

1. Prosta L jest równoległa do osi x, jeżeli współczynnik $a = 0$, natomiast współczynnik $b \neq 0$.
Wtedy prosta o równaniu

$$by + c = 0 \quad lub \quad y = -\frac{c}{b}$$

jest równoległa do osi x

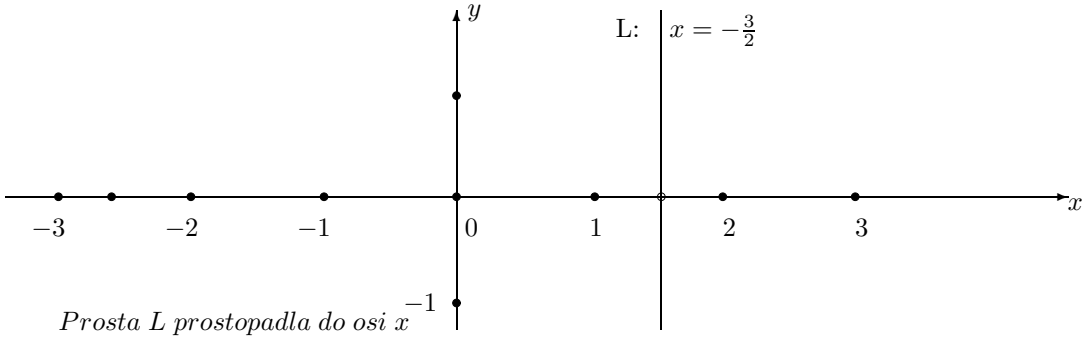


Wykres funkcji liniowej $y = -\frac{c}{b}$, *dla* $-\infty < x < \infty$

2. Prosta L jest prostopadła do osi x, jeżeli współczynnik $b = 0$, natomiast współczynnik $a \neq 0$.
Wtedy prosta o równaniu

$$ax + c = 0 \quad lub \quad x = -\frac{c}{b}, \quad dla \quad -\infty < y < \infty$$

jest prostopadła do osi x.
Wykres prostej L o równaniu $2x + 3 = 0$ lub $x = -\frac{3}{2}$, *dla* $-\infty < y < \infty$ podajemy niżej



Prosta L prostopadla do osi x

3. Prosta L o równaniu

$$ax + by + c = 0, \qquad gdy \quad a \neq 0, \;\; i \;\; b \neq 0$$

przecina oś x w punkcie $(-\frac{c}{a}, 0)$ oraz oś y w punkcie $(0, -\frac{c}{b})$

Przykład 12.9 *Podaj wykres i znajdź punkty przecięcia prostej*

$$x + y - 1 = 0$$

z osią x i z osią y

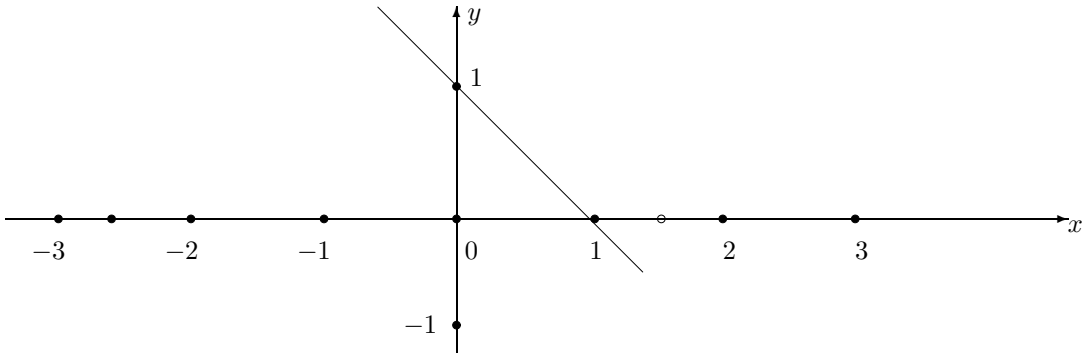
Rozwiązanie.
Dla prostej L o współczynnikach $a = 1,\ b = 1,\ c = -1$ obliczamy współrzędną x punktu przecięcia prostej $x + y - 1 = 0$ z osią x, gdy $y = 0$

$$x = -\frac{c}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

współrzędną punktu przecięcia prostej $x + y - 1 = 0$ z osią y, gdy $x = 0$

$$y = -\frac{c}{b} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

Wykres prostej o równaniu $x + y - 1 = 0$.



12.7 Proste równoległe. Równanie ogólne.

Rozpatrzmy dwie proste L_1 i L_2 o równaniach w formie ogólnej

$$\begin{aligned} L_1: &\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2: &\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{12.10}$$

Proste L_1 i L_2 o równananiach (12.10) są równoległe, jeżeli współczynniki a_1, b_1 są proporcjonalne do współczynników i b_1, b_2, to znaczy

$$a_1 = k * a_2, \quad b_1 = k * b_2 \tag{12.11}$$

dla pewnej liczby $k \neq 0$, którą nazywamy współczynnikiem proporcji.

Przykład 12.10 *Sprawlź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x - y + 1 = 0 \\ L_2: &\quad x - y - 1 = 0 \end{aligned} \tag{12.12}$$

są równoległe.
Podaj wykresy prostej L_1 i L_2.

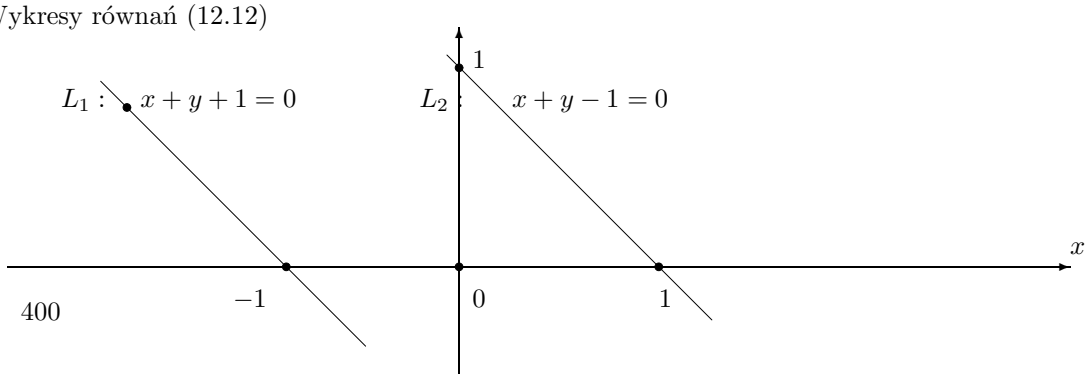
Rozwiązanie.
Proste L_1 i L_2 są równoległe ponieważ ich współczynniki

$$a_1 = 1, \quad b_1 = -1,$$
$$a_2 = 1, \quad b_2 = -1,$$

spełniają warunek proporcji (12.11)

$$1 = 1 * 1, \quad -1 = -1 * 1$$

dla współczynnika proporcji $k = 1$
Wykresy równań (12.12)



Zauważmy, że prosta o równaniu

$$ax + by + c = 0$$

- przecina oś y, w punkcie $(0, -\frac{c}{b})$, gdy $x = 0$, wtedy prosta jest równoległa do oisi x

$$by + c = 0, \quad i \quad y = -\frac{c}{b}, \;\; dla \quad b \neq 0, \;\; -\infty < y < \infty.$$

- przecina oś x, w punkcie $(-\frac{c}{a}, 0)$, gdy $y = 0$, wtedy prosta jest równoległa do osi y

$$ax + c = 0, \quad i \quad x = -\frac{c}{a} \quad dla \quad a \neq 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

- dwie proste o równaniach

$$\begin{aligned} L_1: &\quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ L_2: &\quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{12.13}$$

przecinają się w punkcie (x_0, y_0), jeżeli ten punkt spełnia równania tych prostych

$$\begin{aligned} L_1: &\quad a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0 \\ L_2: &\quad a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{12.14}$$

Przykład 12.11 *Podaj położenie na płaszczyźnie (x, y) dwóch prostych o rónaniach*

$$x - y = 0,$$

$$x + y - 1 = 0$$

Znajdź ich punkty przecięcia z osiamy x i y oraz punkt przecięcia tych prostych.

Rozwiązanie. Prosta o równaniu $x - y = 0$ przecina oś x i oś y, gdy $y = 0$, lub $x = 0$, wtedy$x = y = 0$. Zatem ta prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych, przez punkt $(0, 0)$.
Prosta o równaniu $x + y - 1 = 0$ przecina oś x, gdy $y = 0$. Wtedy mamy równanie

$$x - 1 = 0, \;\; i \;\; x = 1.$$

Prosta o równaniu $x + y - 1 = 0$ przecina oś y, gdy $x = 0$. Wtedy mamy równanie

$$y - 1 =, \;\; i \;\; y = 1.$$

Zatem prosta ta przecina oś x w punkcie $(1, 0)$ i przecina oś y w punkcie $(0, 1)$.
Dwie proste przecinają się w punkcie (x_0, y_0), gdy współrzędne tego punktu spełniają oba równania, to znaczy

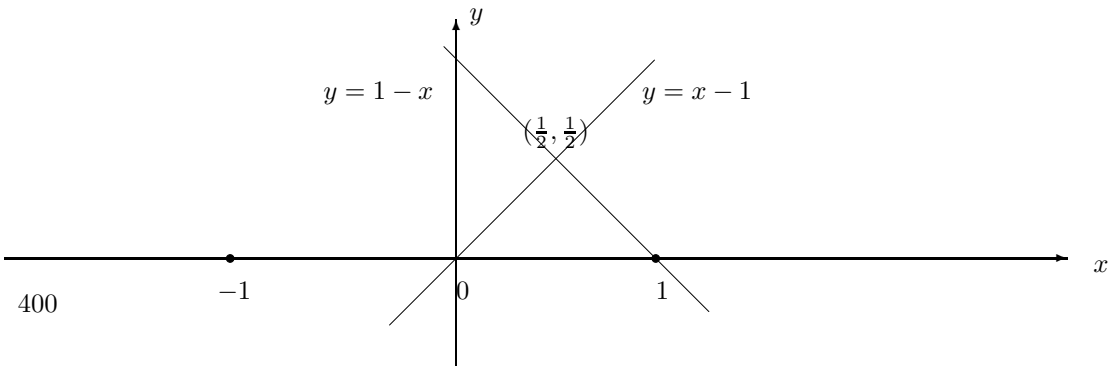
$$x_0 - y_0 = 0, \quad y_0 = x_0$$

$$x_0 + y_0 - 1 = 0$$

Podstawiając $y_0 = x_0$ do drugiego równania znajdujemy

$$x_0 + y_0 - 1 = 0, \qquad 2x = 1, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Zatem proste przecinają się w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Proste: $y = x, \quad y = 1 - x$

12.8 Proste prostopadłe. Równanie ogólne

Rozpatrzmy dwie proste L_1 i L_2 o równaniach w formie ogólnej

$$\begin{aligned} L_1 : &\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2 : &\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{12.15}$$

Proste L_1 i L_2 o równananiach (12.15) są prostopadłe, wtedy i tylko wtedy, jeżeli współczynniki $a_,b_1$ i a_2, b_2 spełniają równanie

$$a_1 * b_1 + a_2 * b_2 = 0 \tag{12.16}$$

Przykład 12.12 *Sprawlź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad 2x - y - 2 = 0 \\ L_2: &\quad x + 2y + 2 = 0 \end{aligned} \tag{12.17}$$

są prostopadłe.
Podaj wykresy prostych L_1 i L_2.

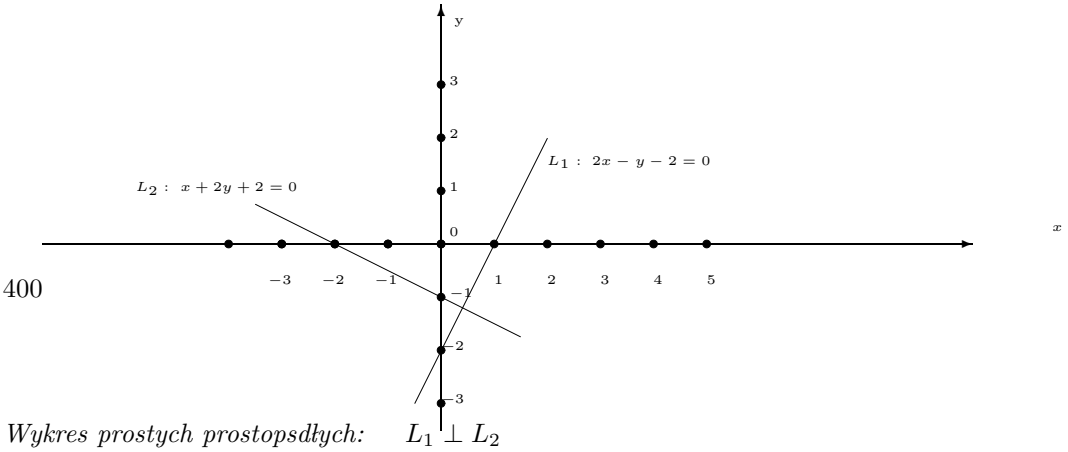
Rozwiązanie.
Proste L_1 i L_2 są prostopadłe ponieważ ich współczynniki

$$a_1 = 2, \quad b_1 = -1,$$
$$a_2 = 1, \quad b_2 = 2,$$

spełniają warunek proporcji (12.16)

$$2 * 1 + (-1) * 2 = 0$$

Wykresy prostych L_1 i L_2 określonych przez równania (12.27)



400

Wykres prostych prostopsdłych: $L_1 \perp L_2$

12.9 Równanie parametryczne prostej

Równanie parametryczne prostej L przechodzącej przez dwa punkty

$$P = (x_1, y_1) \quad i \quad Q = (x_2, y_2)$$

piszemy w postaci

$$L(t) \;=\; P + (Q - P)t, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{12.18}$$

lub w postaci

$$L(t) \;=\; Q * t + (1 - t)P, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{12.19}$$

Zauważmy, że punkty P i Q leżą na prostej $L(t)$, ponieważ dla parametru $t = 0$ mamy punkt

$$L(0) = P$$

i dla parametru $t = 1$ mamy punkt

$$L(1) = Q.$$

Jeżeli parametr t zmienia się od 0 do 1 to punkt $L(t)$ zmienia się wzdłuż odcinka o początku w punkcie P i końcu w punkcie Q. Natomiast, jeżeli parametr t zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, to punkt $L(t)$ przebiega całą prostą L.
Wtedy prosta L jest równoległa do wektora

$$\vec{v} = Q - P$$

o współrzędnych

$$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Parametryczne równanie prostej $L(t)$ piszemy również we współrzędnych

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 + t * x_2 \\ y(t) &= y_1 + t * y_2, \end{aligned} \tag{12.20}$$

dla parametru $t \in (-\infty, +\infty)$.

Przykład 12.13 .
(i) *Znajdź równanie parametryczne prostej $L(t)$ przechodzącej przez dwa punkty $P = (0, -1)$ i $Q = (2, 1)$*
(ii) *Podaj wykres prostej $L(t)$.*

Rozwiązanie (i)
Podstawiając do parametrycznego równania prostej (12.19) dane punkty

$$P = (0, -1) \;\; i \;\; Q = (2, 1)$$

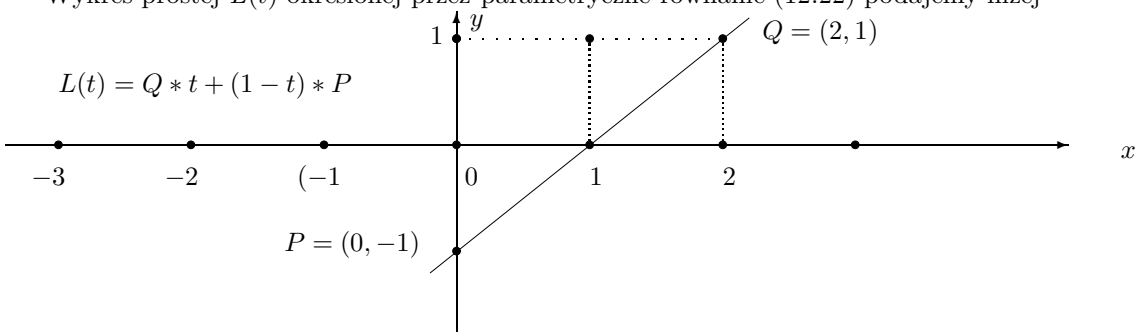
otrzymamy równanie

$$L(t) \quad = \quad L(t) = (2, 1)t + (1 - t)(0, -1) \tag{12.21}$$

Równanie (12.20) piszemy we współrzędnych

$$\begin{aligned} x(t) &= 2t \\ y(t) &= 2t - 1, \end{aligned} \tag{12.22}$$

dla parametru $t \in (-\infty, +\infty)$.
Rozwiązanie (ii).
Wykres prostej $L(t)$ określonej przez parametryczne równanie (12.22) podajemy niżej



Wykres prostej $L(t)$ przechodzącej przez punkty P i Q

12.10 Zadania

Zadanie 12.2 .
(*i*) *Narysuj prostą w układzie współrzędnych* x, y, *przechodzącą przez dwa punkty* $(-1,-2)$ *i* $(2,1)$
(*ii*) *Oblicz współczynniki funkcji liniowej*

$$y(x) = ax + b,$$

przechodzącej przez punkty $(-1,-2)$ *i* $(2,1)$

Zadanie 12.3 *Podaj położenie na płaszczyźnie* (x,y) *dwóch prostych* L_1 *i* L_2 *o rónaniach*

$$L_1: \quad y = 2x - 1, \qquad L_2: \quad y = 1 - 2x$$

Znajdź punkt przecięcia prostych L_1 *i* L_2.

Zadanie 12.4 *Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty* $(x_0, y_0) = (-1,-1)$ *i* $(x_1, y_1) = (1,1)$. *Sprawdź który z punktów* $(0,1)$, $(2,2)$ *leży na prostej.*

Zadanie 12.5 .
(*i*) *Sprawdź, które z punktów*

$$P_1 = (0,0), \qquad P_2 = (1,1),$$
$$P_3 = (0,2), \qquad P_4 = (2,0)$$

leżą na prostych L_1 *lub* L_2 *o równaniach*

$$L_1: \quad y_1(x) = 2x, \qquad L_2: \quad y_2(x) = 2 - x \tag{12.23}$$

(*ii*) *Znajdź punkt przecięcia prostych* L_1, L_2. *Podaj wykres tych prostych.*

Zadanie 12.6 *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad y = 3x + 1, \quad L_3: \quad 2x + 3 \\ L_2: &\quad y = 3x - 1, \quad L_4: \quad 3x - 3 \end{aligned} \tag{12.24}$$

są równoległe.
Podaj wykresy prostej L_1 *i* L_2.

Zadanie 12.7 *Wyznacz równanie prostej* L *równoległej do prostej*

$$L_0: \quad y = 1 - x$$

przechodzącej przez punkt

$$P = (-1,1),$$

Podaj wykres prostej L_0 *i prostej* L

Zadanie 12.8 *Sprawdź czy proste*

$$L_1: \quad y = 0.5x - 1, \quad i \quad L_2: \quad y = 1 - 2x \tag{12.25}$$

są prostopadłe.
Podaj wykresy prostej L_1 *i* L_2.

Zadanie 12.9 *Wyznacz równanie prostej L prostopadłej do prostej*

$$L_0: \quad y = 2 - x$$

przechodzącej przez punkt

$$P = (-1, -1),$$

Podaj wykres prostej L_0 i prostej L

Zadanie 12.10 *Napisz równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty*

$$(x_0, y_0) = (-1, 2) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1).$$

Sprawdź, który z punktów $(1, 0)$, $(2, -1)$ leży na prostej.

Zadanie 12.11 *Znajdź współczynniki a, b, c równania prostej L w forme ogólnej*

$$L: \quad ax + by + c = 0$$

przechodzącej przez punkty

$$P = (-2, 2), \qquad Q = (1, 0)$$

Zadanie 12.12 *Podaj wykres i znajdź punkty przecięcia prostej*

$$2x + y - 4 = 0$$

z osią x i z osią y

Zadanie 12.13 *Sprawlź czy proste*

$$L_1: \quad 2x - y + 1 = 0 \quad i \quad L_2: \quad 4x - 2y - 1 = 0 \tag{12.26}$$

są równoległe.
Podaj wykresy prostej L_1 i L_2.

Zadanie 12.14 *Podaj położenie na płaszczyźnie (x, y) dwóch prostych o rónaniach*

$$L_1: \quad 2x - y = 0, \quad i \qquad L_2: \quad x + 2y - 1 = 0$$

Znajdź ich punkty przecięcia z osiamy x i y oraz punkt przecięcia tych prostych.

Zadanie 12.15 *Sprawlź czy proste*

$$L_1: \quad 3x - y - 1 = 0 \quad i \qquad L_2: \quad x + 3y + 1 = 0 \tag{12.27}$$

są prostopadłe.
Podaj wykresy prostych L_1 i L_2.

Zadanie 12.16 .
(i) Znajdź równanie parametryczne prostej $L(t)$ przechodzącej przez dwa punkty $P = (1, -1)$ i $Q = (2, -1)$
(ii) Podaj wykres prostej $L(t)$.

Zadanie 12.17 *Znajdź równanie parametryczne prostej o równaniu*

$$y = x$$

danym w układzie współrzędnych x, y.

Zadanie 12.18 *Znajdź punkt przecięcia prostych o równaniach parametrycznych*

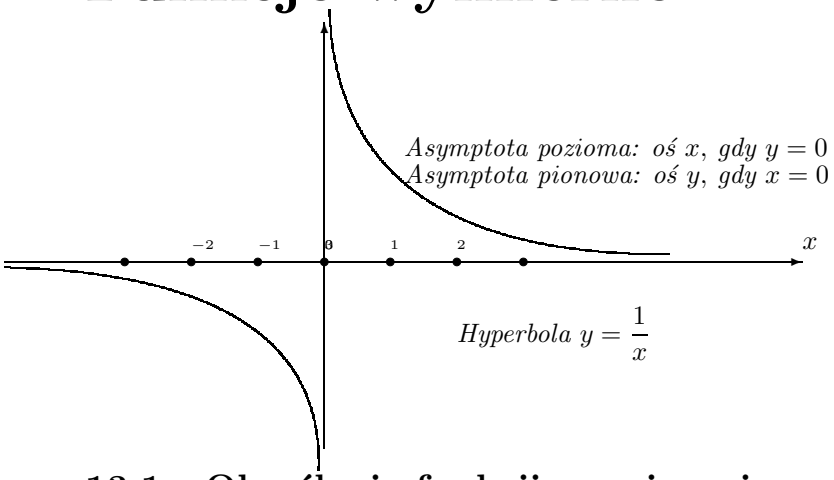
$$L_1(t): \ x(t) = t, \quad y(t) = t, \qquad -\infty < t < \infty.$$

$$L_2(t): \ x(t) = t, \quad y(t) = -t, \quad -\infty < t < \infty.$$

na płaszczyźnie we współrzędnych x, y.

Chapter 13

Funkcje wymierne



13.1 Określenie funkcji wymiernej

Naturalnym rozszrzeniem pojęcia wielomianów są funkcje wymierne. Mianowicie, iloraz wielomianów

$$w(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad q_m(x) \neq 0 \qquad (13.1)$$

stopni n i m jest jest funkcją wymierną.

Zauważmy, że jeżeli mianownik $q_m(x) = constant \neq 0$ jest liczbą różną od zera, to funkcja wymierna jest wielomianem stopnia n.

Zatem dziedziną funkcji wymiernych $w(x)$ jest zbiór tych liczb rzeczywistych

$$x \in R = (-\infty, \infty),$$

dla których mianownik $q_m(x) \neq 0$ jest różny od zera, piszemy

$$Dziedzina\ w(x): \quad D = \{x \in (-\infty, \infty):\ takich\ ze\ \ q_m(x) \neq 0\}$$

13.2 Przykłady funkcji wymiernych

Niżej rozpatrzymy kilka przykładów standardowych funkcji wymiernych.

13.2.1 Hyperbola

Najprostrzą funkcją wymierną jest hyperbola w położeniu kanonicznym na płaszczyźnie kartezjańskie w układzie współrzędnych x, y

$$y = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

Podamy następujące własności tej hyperboli, którą dalej oznaczamy $y = w(x)$:

1. dziedzinę,
2. zbiór wartości,
3. asymptoty hyperboli $y = w(x)$,
4. wykres hypeboli $y = w(x)$.

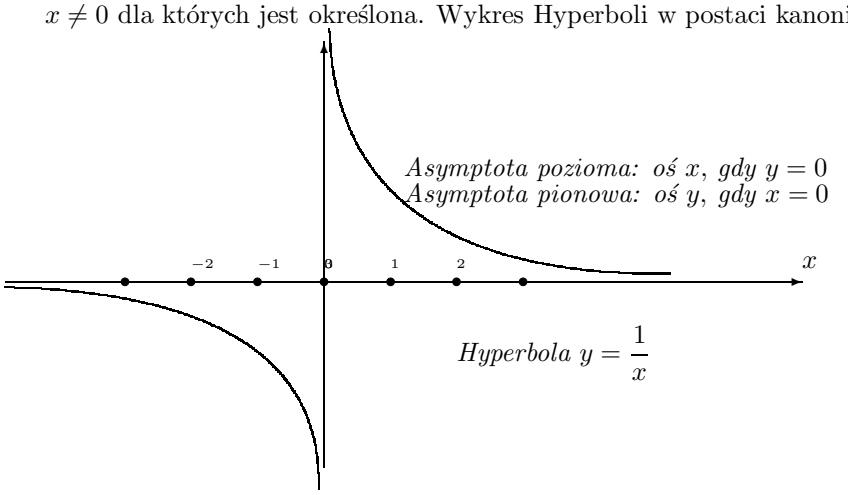
Dziedziną funkcji wymiernej $w(x)$ jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera.

$$Dziedzina\ funkcji\ w(x): \quad D = \{x \in (-\infty, \infty): \ \ x \neq 0.\}$$

Zbiorem wartości funkcji wymiernej $w(x)$ jest również zbiór liczb rzczywistych różnych od zera bez punktu $x = 0$, gdyż $\dfrac{1}{x} \neq 0$ jest określona dla $x \neq 0$.

$$Zbior\ wartosci\ funkcji\ y = w(x): \ \ \{y \in (-\infty, \infty),\ takich\ ze\ \ x \neq 0 \ \ i \ \ y \neq 0.\}$$

Zatem funkcja $w(x)$ nie osiąga wartości zero, $w(x) \neq 0$ dla wszystkich wartości argumentu $x \neq 0$ dla których jest określona. Wykres Hyperboli w postaci kanonicznej



Zauważmy, że ta hyperbola ma dwie asymptoty poziomą oś x i pionową oś y.

Istotnie, gdy argument x dąży do dodatniej lub ujemnej nieskończoności, piszemy

$$x \to \pm\infty$$

to wartości hyperboli dążą do zera

$$w(x) = \frac{1}{x} \to 0, \quad gdy \quad x \to \pm\infty$$

Przykład 13.1 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$y = \frac{x-1}{x+1}, \quad y = w(x) \quad x \neq -1.$$

Dla tej funkcji wymiernej, którą dalej oznaczamy $y = w(x)$, *znajdziemy*

1. *dziedzinę ,*
2. *zbiór wartości,*
3. *rozłóż funkcję* $y = w(x)$ *na ułamki proste,*
4. *asymptoty asymptoty funkcji* $y = w(x)$,
5. *wykres funkcji* $y = w(x)$.

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych dla których mianownik

$$x + 1 \neq 0$$

jest różny od zera.
Jasne, że mianownik jest różny od zera dla $x \neq -1$. Zatem, zbiorem określoności funkcji wymiernej $w(x)$ jest zbiór zwany dziedziną

$$Dziedzina\ y = w(x): \quad D = \{x \in (-\infty, \infty)\ takich,\ ze\ x \neq -1.\}$$

Funkcję wymierną $w(x)$ łatwo zapiszmy wpostaci ułamków prostych. Mianowicie, dodając i oddemując w liczniku liczbę 2, sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} y = w(x) &= \frac{x-1}{x+1} \\ &= \frac{x-1+2-2}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)-2}{x+1} \\ &= 1 - \frac{2}{x+1}, \quad x \neq -1. \end{aligned}$$

Zbiorem wartości funkcji

$$y = w(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \neq 1, \quad x \neq -1.$$

jest zbiór liczb rzczywistych różnych od 1.

$$Zbior\ wartosci\ funkcji\ y = w(x) = \{w \in (-\infty, \infty),\ takich, ze\ w \neq 1\}$$

Ponadto funkcja wymierna $w(x)$ osiąga wszystkie wartości rzeczywiste różne od 1.

Asymptoty funkcji $y = w(x)$**:**

Asymptotą poziomą jest prosta równoległa do osi x

$$y = w(x) = 1 \quad dla \quad wszystkich\ rzeczywistych \quad x \neq -1.$$

Jeżeli x dąży do nieskończości dodatniej lub ujemmnej to wartości funkcji $w(x)$ dążą do 1.

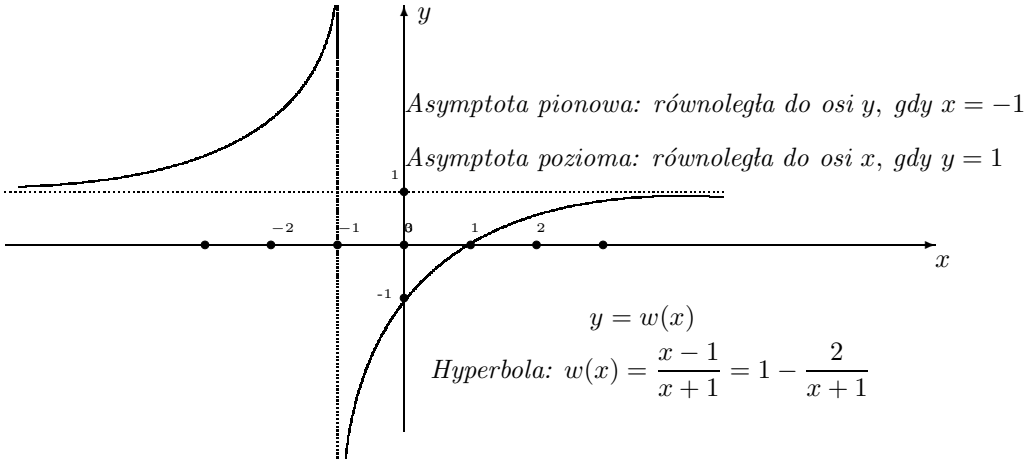
$$Jezeli\ \ x \to \pm\infty,\ \ to\ \ y = w(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \to 1.$$

Asymptotą pionową jest prosta równoległa do osi y przechodząca przez punk osobliwy $x = -1$.

Jeżeli x dąży do -1 z lewej lub z prawej strony punktu $x = -1$, to wartości funkcji $w(x)$ dążą do plus nieskończoności lub minus nieskończoności.

$$x \to -1, \quad to \quad y = w(x) = w(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \to \pm\,\infty.$$

Wykresem tej funkcji wymiernej jest hyperbola



Zauważmy, że ta hyperbola ma dwie asymptoty poziomą $y = 1$ dla każdej rzeczywistej wartości zmiennej $x \in (-\infty, \infty)$ i pionową przechodzącą przez punkt $x = -1$, to jest punkt w którym funkcja jest nieokreślona.

Przykład 13.2 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$y = w(x) = \frac{1}{16x^2+1}, \quad y = w(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Dla funkcji wymiernej $y = w(x)$ znajdziemy

1. *dziedzinę,*
2. *zbiór wartości ,*
3. *asymptoty funkcji $y = w(x)$,*
4. *wykres funkcji $y = w(x)$.*

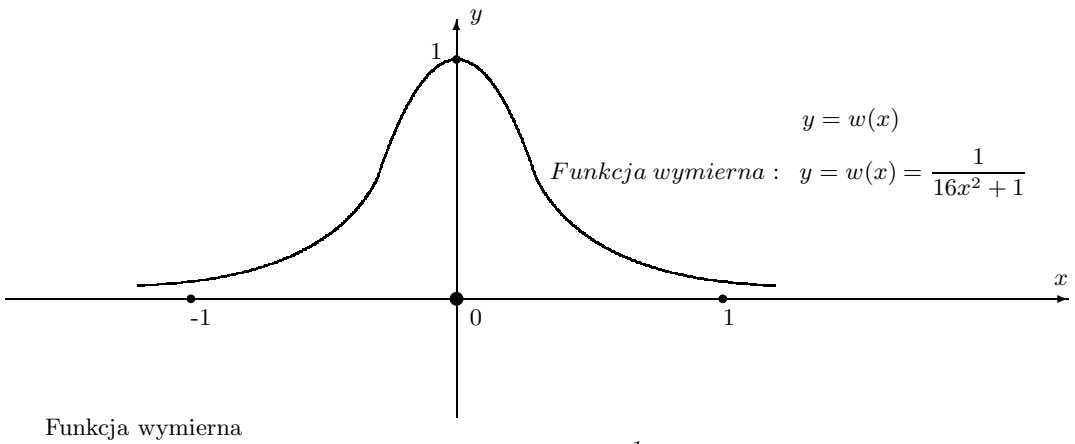
Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych.

$$Dziedzina\ funkcji\ w(x): \quad D = (-\infty < x <, \infty).$$

Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $[1, \infty)$ liczb rzeczywistych większych lub równych od 1. Istotnie, zauważamy, że wartości tej funkcji spełniają nierówność

$$\frac{1}{16x^2+1} \le 1, \ \ dla \quad -\infty < x < \infty.$$

Wykresem tej funkcji wymiernej jest krzywa



Funkcja wymierna

$$y = w(x) = \frac{1}{16x^2 + 1}$$

ma jedną asymptotę poziomą oś x, gdy $y = 0$.

Przykład 13.3 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad y = w(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Dla funkcji $w(x)$ znajdziemy

1. *dziedzinę ,*
2. *zbiór wartości,*
3. *asymptoty funkci $y = w(x)$,*
4. *wykres funkcji $y = w(x)$.*

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, gdyż mianownik $x^2+1 > 1$ jest dodatni dla każdego rzeczywistego

$$x \in (-\infty, \infty).$$

Zbiorem wartości funkcji jest przedział $[-1, 1)$ liczb rzczywistych. Mianowicie, łatwo sprawdzamy nierówność:

$$-1 \leq \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 1. \tag{13.2}$$

Istotnie, funkcję $w(x)$ można napisać w postaci różnicy

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

Dodatnia wartość wyrażenia

$$0 < \frac{2}{x^2 + 1} \leq 2$$

jest mniejsza od 2, równa 2 dla $x = 0$.

Ponadto

$$0 < \frac{2}{x^2 + 1} \to 0, \quad gdy \;\; x \to \pm\infty,$$

dąży do zera, jeżeli $x \to \pm\infty$.

Skąd otrzymujemy nierówność (13.2) przez następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x^2+1} &= 1-\frac{2}{x^2+1} \\ &< 1, \quad gdy \;\; x \to \pm\infty, \end{aligned}$$

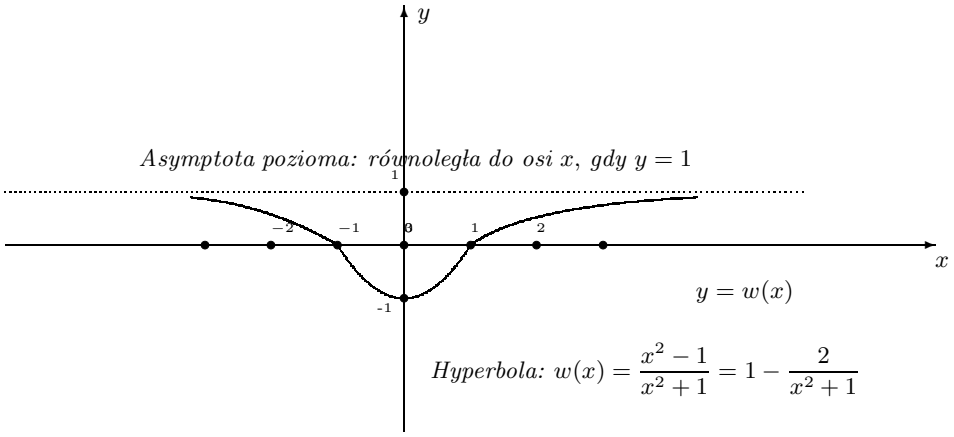
oraz

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x^2+1} &= 1-\frac{2}{x^2+1}, \\ &\geq -1, \quad gdy \quad x=0. \end{aligned}$$

Wykresem funkcji wymiernej

$$y = w(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

jest następująca krzywa:



13.2.2 Rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste

Ułamkiem prostym nazywamy jedną z następujących funkcji wymiernych:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \qquad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad \Delta = p^2-4q < 0.$$

dla ustalonej liczby naturalnej k, i o odpowiednich współczynnikach $A, B, \;\; p, q$, gdy wyróżnik $\Delta = p^2 - 4q < 0$ jest ujemnym.

Przykład 13.4 *Rozłóż funkcje wymierną na ułamki proste*

$$w(x) = \frac{2x-1}{x^2-1}$$

Dla funkcji $w(x)$ podaj

1. *dziedzinę,*
2. *zbiór wartości ,*
3. *postać ułamka prostego funkcji $y = w(x)$,*
4. *asymptoty funkcji $y = w(x)$,*
5. *wykres funkcji $y = w(x)$.*

Rozwiązanie. Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych dla których mianownik jest różny od zera. To znaczy

$$\begin{aligned} D &= \{x \in (-\infty, \infty) : \ x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \neq 0\} \\ &= \{x \in (-\infty, \infty) : \ (x \neq 1) \cap (x \neq -1)\}. \end{aligned}$$

Rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste szukamy metodą współczynników nieoznaczonych. Mianowicie, znajdziemy A i B takie, że następująca równość zachodzi

$$w(x) = \frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

dla każdego $x \in D$ z dziedziny funkcji $w(x)$, to znaczy dla każdego $x \neq -1$ i $x \neq 1$.
Zatem, współczynniki A i B wyznaczamy z tożsamości

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

która jest spełniona dla każdego $x \neq -1$ i $x \neq 1$.
Napiszemy tą tożsamość o wspólnym mianowniku

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

Porównując współczynniki przy x i wyrazy wolne w liczniku, otrzymamy równania na niewiadome A i B

$$A + B = 2, \quad A - B = -1.$$

Obliczamy

$$A = B - 1, \qquad (B-1) + B = 2, \quad 2B = 3.$$

Skąd znajdujemy

$$B = \frac{3}{2}, \quad A = B - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Rozkład funkcji wymiernej $w(x)$ na ułamki proste

$$w(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1).}$$

13.3 Zadania

Zadanie 13.1 *Dla danej funckcji wymiernej*

$$w(x) = \frac{2}{x+2}, \qquad x \neq -2.$$

podaj

1. *dziedzinę funkcji $w(x)$,*
2. *zbiór wartości funkcji $w(x)$,*
3. *postać ułamka prostego funkcji $w(x)$,*
4. *asymptoty funkcji $w(x)$,*
5. *Naszkicuj wykres funkcji $y = w(x)$.*

Zadanie 13.2 *Dla następującej funkcji wymiernej:*

$$(i) \quad w(x) = \frac{2x-1}{x-2},$$

$$(ii) \quad w(x) = \frac{x-2}{x^2-4},$$

podaj

1. *dziedzinę dunkcji* $w(x)$,
2. *zbiór wartości funkcji* $w(x)$,
3. *asymptoty funkcji* $w(x)$,
4. *Rozłóż na ułamki proste funkcję* $w(x)$,
5. *Naszkicuj wykres funkcji* $y = w(x)$.

Zadanie 13.3 *Rozłóż funkcje wymierną na ułamki proste*

$$w(x) = \frac{x^2 - 9}{(x-3)(x^2+4)}$$

podaj

1. *dziedzinę funkcji* $w(x)$,
2. *zbiór wartości funkcji* $w(x)$,
3. *asymptoty funkcji* $w(x)$,
4. *Naszkicuj wykres funkcji* $y = w(x)$.

Chapter 14

Pierwiastki arytmetyczne $\sqrt[n]{a}$. Funkcja pierwiastek kwadratowy $y = \sqrt{x}$

Operacja wyciąganie pierwiastka stopnia n z liczby a jest odwrotną operacją do potęgowania, jeżeli operacja odwrotna jest wykonalna w liczbach rzeczywistych.

Zacznijmy od określenia pierwiastka kwadratowego.

Defimnicja 14.1 *Pierwiestkiem kwadratowym z liczby nieujemnej $a \geq 0$ nazywamy liczbę nieujemną $b \geq 0$, która spełnia równość*

$$b^2 = a.$$

Pierwiastek kwadratowy z liczby $a \geq 0$ oznaczamy symbolem

$$b = \sqrt{a}.$$

Przykład 14.1 *Pierwiastekiem kwadratowym z liczby $a = 4$ jest liczba $b = 2$, ponieważ liczba 2 jest dodatnia i spełnia równość*

$$2^2 = 4.$$

Piszemy

$$\sqrt{4} = 2.$$

Również liczba ujemna -2 spełnia równość

$$(-2)^2 = 4,$$

Jednak z definicji liczba ujemna -2 nie jest pierwiastkiem kwadratowym z liczby 4.

Ogólnie, rzeczywiste pierwiastki stopni parzystych

$$n = 2k,\ k = 1, 2, 3, \ldots :$$

nie istnieją z liczb ujemnych. W szczególności, pierwiastek kwadratowy z liczb ujemnych nie istnieje w zbiorze liczb rzczywistych.

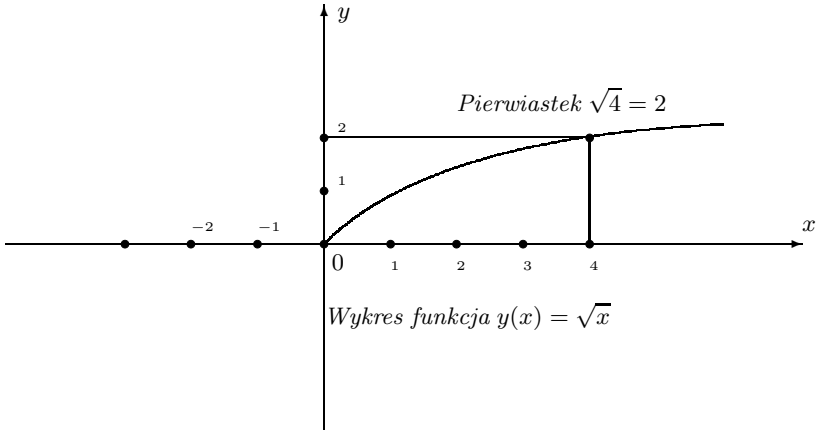
14.1 Funkcja pierwiastek kwadratowy

Podobnie określamy funkcję pierwiastek kwadratowy.

Defimnicja 14.2 *Wartość nieujemna $y \geq 0$ funkcji pierwiastek kwadratowy*

$$y = \sqrt{x},$$

równa jest pierwiastkowi kwadratowemu z liczby nieujemnej $x \geq 0$.
Zatem funkcja piewrwiastek kwadratowy jest dobrze określona dla argumentu $x \in [0, \infty)$ i wartości $y \in [0, \infty)$ należących do półprostej $[0, \infty)$.



Przykład 14.2 *Uprość wyrażenie przez rozkład liczby pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze*

$$(i) \quad \sqrt{200}, \quad (ii) \quad \sqrt{144}$$

Rozwiązanie.
(i)

$$\sqrt{200} = \sqrt{2 * 100} = \sqrt{2 * 10^2} = 10\sqrt{2}$$

(ii)

$$\sqrt{432} = \sqrt{3 * 144} = \sqrt{3 * 12^2} = 12\sqrt{3}$$

Przykład 14.3 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\begin{aligned} \frac{(10 - \sqrt{10})(10 + \sqrt{10})}{\sqrt{10}} &= \frac{100 - 10}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{90}{\sqrt{10}} \quad | * \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{90\sqrt{10}}{10} \\ &= 9\sqrt{10} \end{aligned}$$

Przykład 14.4 *Uprość wyrażenie przez rozkład na czynniki pierwsze liczby pod pierwiastekiem*

$$\sqrt{432} - \sqrt{48}$$

Rozwiązanie.
Rozkład liczb 432 *i* 48 na czynniki pierwsze

432	|	2	48	|	2
216	|	2	24	|	2
108	|	2	12	|	2
54	|	2	6	|	2
27	|	3	3	|	3
9	|	3	1		
3	|	3			
1					

Skąd otrzymujemy rozkład liczb na czynniki piewrwsze

$$432 = 2^4 * 3^3, \quad 48 = 2^4 * 3$$

Uproszczenie wyrażenia

$$\begin{aligned} \sqrt{432} - \sqrt{48} &= \sqrt{2^4 * 3^3} - \sqrt{2^4 * 3} \\ &= 3\sqrt{16 * 3} - \sqrt{16 * 3} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Przykład 14.5 *Uprość wyrażenie*

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{90} - \sqrt{40}}{\sqrt{10}} &= \frac{\sqrt{9 * 10} - \sqrt{4 * 10}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{\sqrt{3^2 * 10} - \sqrt{2^2 * 10}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{3\sqrt{10} - 2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1 \end{aligned}$$

14.2 Algorytm cyfra po cyfrze obliczania pierwiastka kwadratowego

Zacznijmy opis algorytmu od przykładów.

Przykład 14.6 *oblicz przybliżoną wartość pierwiastaka* $\sqrt{2}$ *z dokładnością* 4 *znaki po przecinku.*

Schemat algorytmu obliczania pierwiastaka kwadratowego z liczby $a = 2.0 > 0$ dodatniej jest podobny do schemtu dzielenia liczb całkowitych.

1. W pierwszym kroku, cyfry liczby $a = 2,0$ uzupełniamy zerami i dzielimy na grupy po dwie w lewo od przecinka i w prawo od przecinka, jak niżej

$$\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00}$$

2. Znajdujemy największą liczbę p taką, że p^2 jest mniejszy od liczby o dwóch pierszych cyfrach liczby a. W tym przykładzie

$$p^2 \leq a = 2.$$

Jasne, że dla $a = 2$ liczba $p = 1$, ponieważ $p^2 = 1^2 < 2$.
Natomiast liczba $p = 2$ już jest za duża, $p^2 = 2^2 = 4$ jest większa od $a = 2$.
Zatem, liczbę $p = 1$ piszemy nad kreską, jak niżej

1.		$cyfry$
$\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00}$	|	1

Iloczyn $p * 1 = 1 * 1 = 1$ odejmujemy od liczby 02, jak w pisemnym dzieleniu

$\begin{array}{r} 1. \\ \sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00} \\ 01 \\ --- \\ 0100 \end{array}$	$r_1 = 100$	$cyfry\ \sqrt{a}$ 1

2. Następną cyfrę liczby $\sqrt{2}$ znajdujemy dopisując do liczby $2 * p = 2 * 1$ cyfrę jedności x dla której iloczyn

$$y = (20p + x) * x \leq r_1 = 100. \tag{14.1}$$

W ten sposób cyfry liczby p zwiększamy o jedną cyfrę x, którą obliczamy, w tym przykładzie, przez podstawienie $p = 4$ do równania (14.1)

$$y = (20 * 4 + 4) * 4 = 96.$$

Cyfrę 4 dopisujemy do cyfry 1. nad kreską po przecinku, dalej wykonujemy operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

$\begin{array}{r} 1.4 \\ \sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00} \\ 01 \\ --- \\ 100 \\ 096 \\ --- \\ 000400 \end{array}$	$r_1 = 100$ $r_2 = 20 * 4 + 4 = 96$	$cyfry\ \sqrt{a}$ $x = 1$ $x = 4$

3. Następną cyfrę liczby $p = 1.4$ znajdujemy w podobny sposób.
Mianowicie, liczbę $p = 14$ mnożymy przez 2 i dopisujemy do iloczynu cyfrę x dla której wartość wyrażenia

$$(20p + x) * x = (20 * 14 + 1) * 1 = 281 \leq 400$$

jest największa, a mniejsza od 400. Łatwo sprawdzimy, że $x = 1$.

Cyfrę $x = 1$ dopisujemy do liczby $p = 1.4$ nad kreską. Dalej wykonujemy operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

$\begin{array}{r} 1.41 \\ \sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00} \\ 01 \\ --- \\ 100 \\ 96 \\ --- \\ 400 \\ 281 \\ --- \\ 191 \end{array}$	$r_1 = 100$ $r_2 = 20 * 4 + 4 = 96$ $r_3 = (20 * 14 + 1) * 1 = 281$	$cyfry\ \sqrt{a}$ $x = 1$ $x = 4$ $x = 1$

4. Następną cyfrę liczby $p = 1.41$ znajdujemy w podobny sposób.
Mianowicie, liczbę $p = 141$ mnożymy przez 2 i dopisujemy do iloczynu cyfrę x dla której wartość wyrażenia

$$(20p + x) * x = (20 * 141 + 4) * 4 = 11256 \leq 11900$$

jest największa, a mniejsza od 11900. Łatwo sprawdzimy, że $x = 4$.
Cyfrę $x = 4$ dopisujemy do liczby $p = 1.41$ nad kreską. Dalej wykonujemy operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

1.414			$cyfry\ \sqrt{a}$
$\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00}$			
01			
− − −	$r_1 = 100$		$x = 1$
100			
96	$r_2 = 20 * 4 + 4 = 96$		$x = 4$
− − −			
400			
281	$r_3 = (20 * 14 + 1) * 1 = 281$		$x = 1$
− − −			
11900			
11296	$r_3 = (20 * 14 + 1) * 1 = 281$		$x = 4$
− − −			
604			

5. Następną cyfrę liczby $p = 1.414$ znajdujemy w podobny sposób.
Mianowicie, liczbę $p = 1414$ mnożymy przez 2 i dopisujemy do iloczynu cyfrę x dla której wartość wyrażenia

$$(20p + x) * x = (20 * 1414 + 2) * 2 = 56564 \leq 60400$$

jest największa, a mniejsza od 60400. Łatwo sprawdzimy, że $x = 2$.

Cyfrę $x = 2$ dopisujemy do liczby $p = 1.414$ nad kreską. Dalej wykonujemy operacje odejmowania jak w dzieleniu pisemnym

1.4142			$cyfry\ \sqrt{a}$
$\sqrt{02,00\ 00\ 00\ 00}$			
01			
− − −	$r_1 = 100$		$x = 1$
100			
96	$r_2 = 20 * 4 + 4 = 96$		$x = 4$
− − −			
400			
281	$r_3 = (20 * 14 + 1) * 1 = 281$		$x = 1$
− − −			
11900			
11296	$r_3 = (20 * 141 + 1) * 1 = 281$		$x = 4$
− − −			
60400			
56564	$r_3 = (20 * 1414 + 2) * 2 = 56564$		$x = 2$
− − −			
3836			

Kończąc obliczenia z dokładnością 4 cyfry po przecinku, otrzymujemy przybliżoną wartość pierwiastka $\sqrt{2} \approx 1.4142$.
Jasne, że możemy kontynuować ten proces obliczenia $\sqrt{2}$, żeby otrzymać większą dokładność niż 4.

14.2.1 Równaia z wyrażeniem $\sqrt{x}$

Rozwiązywanie równań z wyrażeniem $\sqrt{x}$ wyjaśniamy w następujących przykładach:

Przykład 14.7 *Rozwiąż równanie:*

$$x = \sqrt{x}, \qquad x \geq 0.$$

Rozwiązanie. Naturalnie rozwiązania szukamy w dziedzinie tego równania, to jest w przedziale $[0, \infty)$ liczb nieujemnych. Podnosząc stronami do kwadratu to równanie, otrzymamy równanie nie równoważne

$$x^2 = x, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{14.2}$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych włączając liczby ujemne.
Łatwo znajdujemy rozwiązanie

$$\begin{aligned} & x - x^2 = 0, \quad x(x-1) = 0, \qquad x = 0, \\ & \text{lub} \\ & x - 1 = 0, \qquad x = 1. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Sprawdzmy, że oba pierwiastki $x = 0$ lub $x = 1$ należą do dziedziny $[0, \infty)$. Zatem to równanie ma dwa rozwiązania $x = 0,\ x = 1$.

Przykład 14.8 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{2x} = \sqrt{x-1} \tag{14.4}$$

Rozwiązanie.
Zauważamy, że równanie (14.4) jest określone dla wyrażenia pod pierwiastkiem $2x \geq 0$, gdy $x \geq 0$ oraz dla wyrażenia po prawej stronie $x - 1 \geq 0$, gdy $x \geq 1$.
Zatem dziedziną tego równania jest półprosta $[1, \infty)$.
Podnosząc stronami równanie (14.4) do kwadratu otrzymamy równanie nie równoważne

$$2x = x - 1,$$

którego rozwiązanie

$$x = -1$$

nie należy do dziedziny równania (14.4), piszemy $x = -1 \notin [1, \infty)$.
Odpowiedź: Równanie (14.4) nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych.

Przykład 14.9 *Rozwiąż równanie:*

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1, \qquad x \geq 1. \tag{14.5}$$

Rozwiązanie. Naturalnie rozwiązania szukamy w dziedzinie tego równania, to jest w przedziale $(1, \infty)$, gdy $x + 1 \geq 0$ i $x - 1 \geq 0$.

Podnosząc stronami do kwadratu to równanie, otrzymamy równanie nie równoważne

$$\begin{aligned} & (x+1) - 2\sqrt{(x+1)(x-1)} + (x-1) = 1 \\ & \text{lub} \\ & 2x - 2\sqrt{x^2-1} = 1 \end{aligned} \tag{14.6}$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \leq -1$ lub $x \geq 1$ włączając liczby ujemne mniejsze od -1. Zatem równanie (14.5) ma różną dziedzinę od dziedziny równań (14.6).
Równanie (14.6) napiszmy w postaci

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2} - x, \qquad x \geq 1.$$

Dalej, podnosząc jeszcze raz ostatnie równanie stronami do kwadratu, otrzymamy równanie również nie równoważne

$$\begin{aligned} & x^2 - 1 = (\frac{1}{2} - x)^2, \\ & \text{lub} \\ & x^2 - 1 = \frac{1}{4} - x + x^2, \\ & \text{lub,} \\ & x - \frac{5}{4} = 0, \end{aligned}$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych.
Rozwiązaniem ostatniego równania jest liczba $x = \frac{5}{4} > 1$, która należy do dziedzny równania.
Sprawdzamy, że $x = \frac{5}{4}$ jest rozwiązaniem równania (14.5)

$$\sqrt{\frac{5}{4}+1} - \sqrt{\frac{5}{4}-1} = 1, \quad \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

14.3 Pierwiastek sześcienny. Kubiczny $\sqrt[3]{a}$

W odróżnieniu od pierwiastków stopni parzystych, istnieją rzeczywiste ujmne pierwiastki stopni nieparzystych

$$n = 2k+1, \ k = 1, 2, 3, ...,$$

z liczb ujemnych.

Mianowicie, rozpatrzmy pierwiastek kubiczny, gdy $n = 3$.

Defimnicja 14.3 *Pierwiastekiem kubicznym* $(n = 3)$ *z liczby* a *dodatnie lub ujemnej jest liczba*

$$b = \sqrt[3]{a} \quad lub \quad b = a^{\frac{1}{3}}$$

która spełnia równość

$$b^3 = a$$

Na przykład dla $a = 8$ lub $a = -8$ pierwiastek kubiczny

$$b = \sqrt[3]{8} = 2, \qquad bo \qquad b^3 = 2^3 = 8,$$
$$b = \sqrt[3]{-8} = -2 \qquad bo \qquad b^3 = (-2)^3 = -8$$

Niżej w tabeli podane są pierwiastki kubiczne niektórych liczb

a	-125	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	125
$y = \sqrt[3]{a}$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

14.4 Funkcja pierwiastek sześcienny. Kubiczny $y = \sqrt[3]{x}$

Podobnie jak funkcję pierwiastek kwadratowy, określamy funkcję pierwiastek kubiczny.

Defimnicja 14.4 *Wartość* y *funkcji pierwiastek kubiczny*

$$y = \sqrt[3]{x},$$

równa jest pierwiastkowi kubicznemu z liczby $x \in (-\infty, \infty)$.
Zatem funkcja piewrwiastek kubicznywy jest dobrze określona dla argumentu $x \in [-\infty, \infty)$ *i wartości* $y \in (-\infty, \infty)$ *należących do zbioru liczb rzeczywistych* $(-\infty, \infty)$.

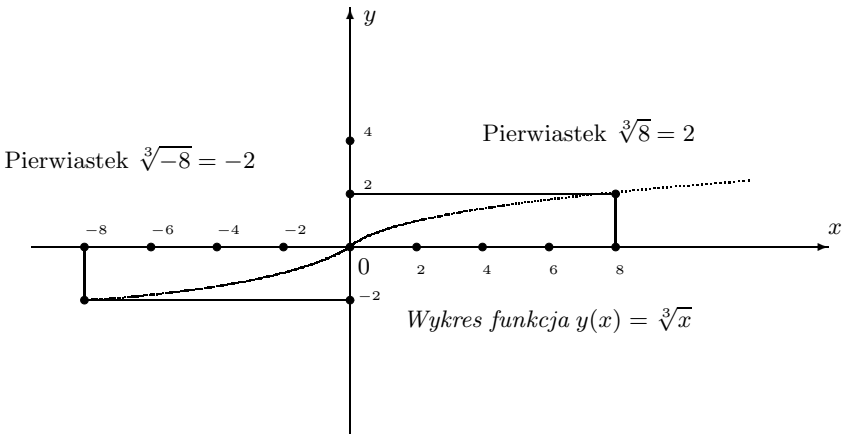
Zauważmy, że funkcja pierwiastek jest rosnąca, to znaczy ma większe wartości dla większych argumentów, piszemy

Jeżeli argumenty x_1, x_2 spełniają nierówność

$$x_1 < x_2$$

to odpowiednie wartości y_1, y_2 spełniają nierówność

$$y_1 < y_2.$$



14.5 Przykłady wyrażeń z pierwiastakami stopnia $n = 3$

Przykład 14.10 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{64}}$$

Rozwiązanie.
Zauważamy, że $81 = 3^3$ *i* $64 = 2^6$.
Obliczamy

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{3}{4}.$$

Przykład 14.11 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{3} - 4}$$

Rozawiązanie.
Wiadomo, że

$$81 = 3^4, \quad 64 = 2^6$$

Zatem wartość wyrażenia

$$\frac{\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{64}}{3\sqrt[3]{3} - 4} = \frac{\sqrt[3]{3^3} - \sqrt[3]{2^6}}{3\sqrt[3]{3} - 4} = \frac{3\sqrt[3]{3} - 4}{3\sqrt[3]{3} - 4} = 1$$

Przykład 14.12 *Uprość wyrażenie przez rozkład liczby pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze*

$$(i) \quad \sqrt[3]{192}, \quad (ii) \quad \sqrt[3]{648}$$

Rozwiązanie.
(i)

$$\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{3 * 64} = \sqrt[3]{3 * 2^6} = \sqrt[3]{3 * 4^3} = 4\sqrt[3]{3}$$

(ii)

$$\sqrt[3]{648} = \sqrt[3]{8 * 81} = \sqrt[3]{2^3 * 3^4} = 2\sqrt[3]{3^3 * 3} = 2 * 3\sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}$$

Przykład 14.13 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{(100-\sqrt[3]{1000})(100+\sqrt[3]{1000})}{\sqrt[3]{1000}}$$

Rozwiązanie.
Zauważamy, że $\sqrt[3]{1000}=10$ oraz stosujemy wzór na rżnię kwadratów

$$\begin{aligned}\frac{(100-\sqrt[3]{1000})(100+\sqrt[3]{1000})}{\sqrt[3]{1000}} &= \frac{(100-\sqrt[3]{10^3})(100+\sqrt[3]{10^3})}{10}\\ &= \frac{(100-10)(100+10)}{10}\\ &= \frac{100^2-10^2}{10}=\frac{10000-100}{10}=990\end{aligned}$$

14.6 Pierwiastek arytmetyczny stopnia n

Ogólnie, pierwiastek arytmetyczny stopnia n określamy jako operację odwrotną do operacji potęgowania określoną dla liczb rzeczywistych nieujemnych.

Defimnicja 14.5 *Pierwiestkiem arytmetycznym n-tego stopnia z liczby nieujemnej $a\geq 0$ nazywamy liczbę nieujemną $b\geq 0$, która spełnia równość*

$$b^n=a,\qquad n=2,3,4,...;$$

Pierwiastek arytmetyczny z liczby $a\geq 0$ oznaczamy symbolem

$$b=\sqrt[n]{a}.$$

Niżej podajemey pierwiastki arytmetyczne z niektórych liczb nieujemnych.

Przykład 14.14

$$\begin{array}{lllll} Dla\ n=2, & a=256, & \sqrt{256}=16, & b=16, & 16^2=256,\\ Dla\ n=3, & a=512, & \sqrt[3]{512}=8, & b=8, & 8^3=512,\\ Dla\ n=4, & a=256, & \sqrt[4]{256}=4, & b=4, & 4^4=256,\\ Dla\ n=5, & a=1024, & \sqrt[5]{1024}=4, & b=4, & 4^5=1024,\end{array}$$

14.7 Działania na pierwiastkach

Niżej w tabeli podane są wzory operacji na pierwiastkach

$\sqrt[n]{a^n}=a$	$a\geq 0$	$a^{\frac{n}{n}}=a$
$\sqrt[n]{a*b}=\sqrt[n]{a}*\sqrt[n]{b}$	$a\geq 0$	$b\geq 0$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$a\geq 0$	$b>0$
$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$	$a\geq 0$	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

Na przykład

$\sqrt[n]{2^n} = 2$	$a = 2 \geq 0$	$2^{\frac{n}{n}} = 2^1 = 2$
$\sqrt[2]{4 * 9} = \sqrt[2]{4} * \sqrt[2]{9} = 2 * 3 = 6$	$a = 4 \geq 0$	$b = 9 \geq 0$
$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{4}$	$a = 125 \geq 0$	$b = 64 > 0$
$\sqrt[4]{3^8} = (\sqrt[4]{3})^8$	$a = 3 \geq 0$	$\sqrt[4]{3^8} = 3^{\frac{8}{4}} = 3^2 = 9$

Przykład 14.15 *Obliczamy wartość wyrażenia*

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{4096}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{2^{12}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{12}{2}}} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = 4$$

14.8 Zadania

Zadanie 14.1 *Oblicz wartość wyrażenia przez rozkład liczby pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze*

$$(i) \quad \sqrt{300}, \quad (ii) \quad \sqrt{169}$$

Zadanie 14.2 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{(20 - \sqrt{10})(20 + \sqrt{10})}{\sqrt{3}}$$

Zadanie 14.3 *Oblicz wartość wyrażenia przez rozkład na czynniki pierwsze liczby pod pierwiastekiem*

$$\sqrt{3072}$$

Zadanie 14.4 *Uprość wyrażenie*

$$\frac{\sqrt{160} - \sqrt{90}}{\sqrt{10}}$$

Zadanie 14.5 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{512}}$$

Zadanie 14.6 *Oblicz wartość wyrażenia przez rozkład liczby pod pierwiastkiem na czynniki pierwsze*

$$(i) \quad \sqrt[3]{384}, \quad (ii) \quad \sqrt[3]{1296}$$

Zadanie 14.7 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{(20 - \sqrt[3]{1000})(20 + \sqrt[3]{1000})}{\sqrt[3]{1000}}$$

Zadanie 14.8 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3^6}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2^6}}}$$

Zadanie 14.9 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{x + 1} = x$$

Zadanie 14.10 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{2x - 1} = 1$$

Zadanie 14.11 *Rozwiąż równanie*

$$\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 2} = 2$$

Chapter 15

Funkcja wykładnicza

Funkcję wykładniczą określamy następującym wzorem:

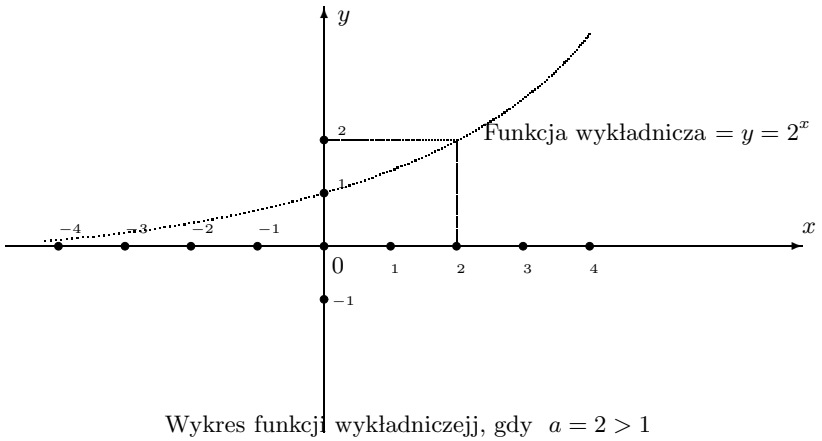
$$y = f(x) = a^x, \qquad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Liczbę rzeczywistą $a > 0,\ a \neq 1$ dodatnią i różną od jeden nazywamy podstawą funkcji wykładniczej. Dziedziną funkcji wykładniczej jest cały zbiór liczb rzczywistych

$$D = \{x \in R : \ -\infty < x < \infty\}.$$

Zbiorem wartości funkcji wykładniczej jest zbiór liczb dodatnich

$$R_+ = \{y \in R,\ \ 0 < y < \infty\}.$$



Wykres funkcji wykładniczejj, gdy $a = 2 > 1$

Zauważmy z wykresu, że funkcja wykładnicza ma jedną asymptotę, którą jest oś x. To są punkty $(x, 0)$ gdy współrzędna $-\infty < x < \infty$ i współrzędna $y = 0$.

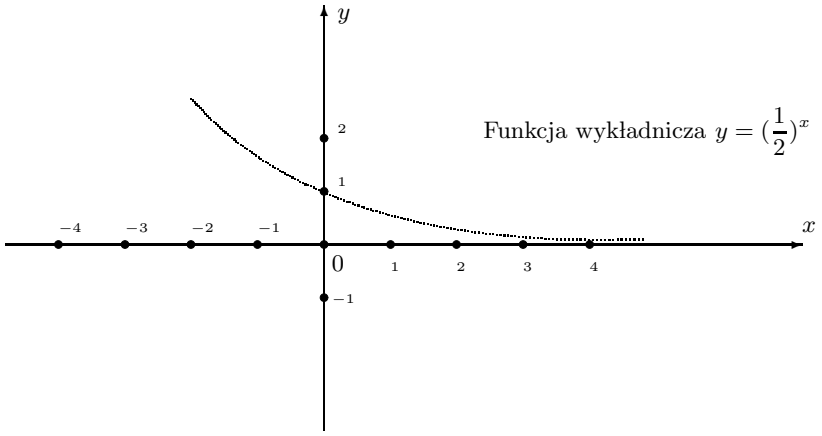
Funkcja wykładnicza

$$y = f(x) = a^x$$

jest rosnąca, jeżeli jej podstawa $a > 1$, natomiast jest malejąca, jeżeli jej podstawa $0 < a < 1$.

Na rysunku funkcja $y = f(x) = 2^x$ jest rosnąca ponieważ jej wykres wzrasta gdy argument x też wzrasta.

Wykres funkcji wykładniczej $y = f(x) = (\frac{1}{2})^x$, gdy jej podstawa $0 < a = \frac{1}{2} < 1$.



Widzimy z powyższego wykresu, że, funkcja wykładnicza

$$y = (\frac{1}{2})^x$$

jest malejąca, jej wartość $(\frac{1}{2})^x$ maleje, podczas gdy jej argument x rośnie.

15.0.1 Własności funkcji wykładniczej

1. Wartość funkcji wykładniczej w zerze, gdy $x = 0$ równa jest jeden.

   $$y = f(0) = 1, \qquad poniewaz \quad a^0 = 1,$$

   dla każdej podstawy $a > 0$.
2. Wartość funkcji wykładniczej dla $x = 1$ równa jest podstawie a.

   $$y = f(1) = a, \qquad poniewaz \quad a^1 = a,$$

3. funkcja wykładnicza $y = f(x)$ od sumy argumentów równa jest iloczynowi wartości

   $$f(x + t) = f(x) * f(t)$$

   Istotnie sprawdzamy, że

   $$f(x + t) = a^{x+t} = a^x * a^t = f(x) * f(t)$$

4. funkcja wykładnicza od różnicy argumentów równa jest ilorazowi wartości

   $$f(x - t) = \frac{f(x)}{f(t)}$$

   Rzeczywiście sprawdzamy, że

   $$f(x - t) = a^{x-t} = a^x * a^{-t} = \frac{a^x}{a^t} = \frac{f(x)}{f(t)}$$

5. funkcja wykładnicza od iloczynu argumentów równa jest potędze

   $$f(x * t) = (f(x))^t$$

   Sprawdzamy, że

   $$f(x * t) = a^{x*t} = (a^x)^t = (f(x))^t$$

6. funkcja wykładnicza od argumentu $\frac{m}{n}$ równa jest pierwiastkowi n-tego stopnia z wartości m-tej potęgi
$$f(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{f(m)}$$
Mianowicie
$$f(\frac{m}{n}) = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{f(m)}$$

Przykład 15.1 *Oblicz wartość wyrażenia*
$$3^8 * 3^{-5}$$

Rozwiązanie:
W tym przykładzie stosujemy własność 2 do funkcji wykładniczej
$$f(x) = a^x$$
gdy podstawa $a = 3$ i argumenty $x = 8$ i $x = -5$. Zatem stosując własność 2, obliczamy
$$f(3) * f(-5) = 3^8 * 3^{-5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27$$

Przykład 15.2 *Oblicz wartość wyrażenia*
$$3^{\frac{5}{2}} * 12^{\frac{1}{2}}$$

Rozwiązanie:
Korzystając z własności funkcji wykładniczej, obliczamy
$$\begin{aligned} 3^{\frac{5}{2}} * 12^{\frac{1}{2}} &= 3^{\frac{5}{2}} * (3*4)^{\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{5}{2}} * 3^{\frac{1}{2}} * 4^{\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}} * \sqrt{4} = 3^2 * 2 = 18. \end{aligned}$$

Zadanie 15.1 *Oblicz wartość wyrażenia*
$$(i) \quad (3\frac{1}{3})^{-2}, \qquad (ii) \quad 2^{\frac{8}{3}} * 2^{-\frac{5}{3}} * 16^{\frac{1}{2}}$$

Zadanie 15.2 *Rozpatrz funkcję wykładniczą*
$$f(x) = 2^x, \qquad -\infty < x < \infty.$$
Naszkicuj wykres funkcji wykładniczej
$$y = f(x-1) + 1, \qquad -\infty < x < \infty.$$
w układzie współrzędnych x, y
Oblicz wartość funkcji $f(x-1)+1$ dla $x = 3$.

15.0.2 Równania wykładnicze

Równania wykładnicze i nierówności wkładnicze rozwiązujemy korzystają z następujących własności:

- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x > 0$ jest dodatnia na całej osi liczbowej dla $-\infty < x < \infty$.
- zbiórem wartości funkcji wykładniczej są wszystkie liczby dodatnie, $R_+ = (0, \infty)$.
- funkcja wykładnicza $f(0) = 0$ dla każdej podstawy $a > 0,\ a \neq 1$
- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca na całej osi liczbowej $-\infty < x < \infty$, jeżel podstawa $a > 1$.

- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca na całej osi liczbowej $-\infty < x < \infty$, jeżel podstawa $0 < a < 1$.

Niżej podajemy przykłady rozwiązań równań wykładniczych

Przykład 15.3 *Rozwiąż równanie*

$$2^{2x} - 3 * 2^x + 2 = 0$$

Rozwiązanie. Dziedziną tego równania jest cały zbiór liczb rzczywistych R. Teraz, to równanie napiszemy w postaci

$$(2^x)^2 - 3 * 2^x + 2 = 0$$

Stosując podstawienie $t = 2^x$, otrzymamy równanie kwadratowe

$$t^2 - 3t + 2 = 0, \qquad \Delta = (-3)^2 - 4 * 2 = 1.$$

Oblicczamy pierwiastki tego równania

$$t_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1, \qquad \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2.$$

Wracając do zmiennej x, obliczamy rozawiązanie:
Jeżeli $2^x = 1$, to $x = 0$.
Jeżeli $2^x = 2$, to $x = 1$.

Przykład 15.4 *Rozwiąż równanie*

$$3^{\frac{2x-1}{3x-1}} = 9$$

Rozwiązanie. Dziedziną tego równania jest zbiór liczb rzczywistych różnych od $\frac{1}{3}$. to znaczy $D = R - \{\frac{1}{3}\}$.
Teraz, to równanie napiszemy w postaci

$$3^{\frac{2x-1}{3x-1}} = 3^2$$

Skąd mamy równie

$$\frac{2x-1}{3x-1} = 2,$$

Obliczamy rozwiązanie

$$2x - 1 = 2(3x - 1), \quad 2x - 1 = 6x - 2, \quad 4x = 1, \quad x = \frac{1}{4}$$

Zadanie 15.3 *Rozwiąż równanie*

$$3^x + 27 * 3^{-x} - 12 = 0.$$

Zadanie 15.4 *Rozwiąż równanie*

$$5^{\frac{3x-1}{2x-3}} = 25.$$

Chapter 16

Funkcja logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej. To znaczy, że jeżeli funkcja wykładnicza ustala zależność zmiennej y od zmiennej x wzorem

$$y = a^x, \qquad a > 0, \;\; a \neq 1$$

to funkcja odwrotna ustala zależność zmiennej x od zmiennej y wzorem

$$x = log_a\, y, \qquad y > 0.$$

Wtedy stałą $a > 0, \;\; a \neq 1$ lub $0 < a < 1$ nazywamy podstawą logarytmu.
Zatem dziedziną funkcji logarymicznej jest zbiór wartości fynkcji wykładniczej

$$D = \{y : \; 0 < y < \infty\}$$

natomiast zbiorem wartości fnkcji logarytmicznej jest dziedzina funkcji wykładnczej

$$R = \{x : \; 0 < x < \infty\}$$

Na przykład logarytm dziesiętny, gdy $a = 10$ piszemy

$$x = log_{10}\, y, \qquad dla \quad y > 0$$

Logarytm dziesiętny jest związany z systemem liczbowym pozycyjnym dziesiętnym standardowym. Bez istotnej zmiany, możemy zamienić role zmiennych x i y. Mianowicie, zmienną niezależną oznaczamy literą x, natomiast zmienną zależną oznaczamy literą y, która zależy od x.

Logarytm dziesiętny, jako standardowy, oznaczamy symbolem

$$y = log\, x, \qquad x > 0,$$

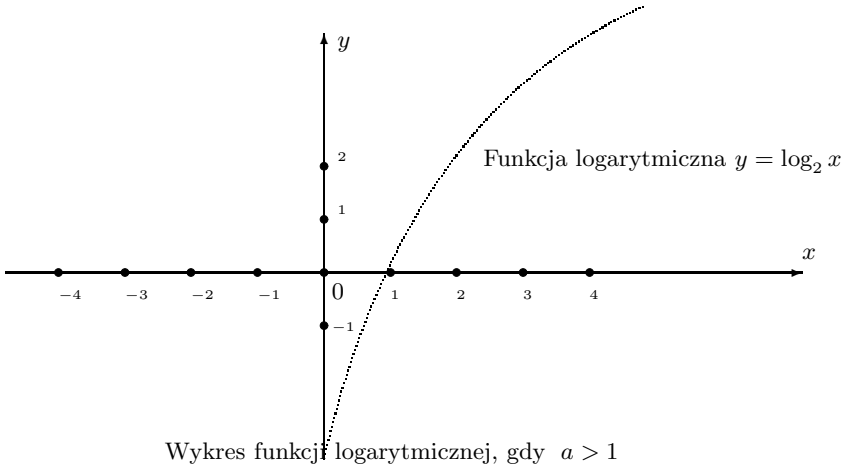
bez pisania podstawy logarytmy 10.

Funkcja logarytmiczna jest rosną dla podstawy większej od jedności $a > 1$, jest malejąca, jeżeli podstawa $0 < a < 1$.
Rozpatrzmy wykres funkcji odwrotnej

$$y = log_2\, x, \qquad 0 < x < \infty$$

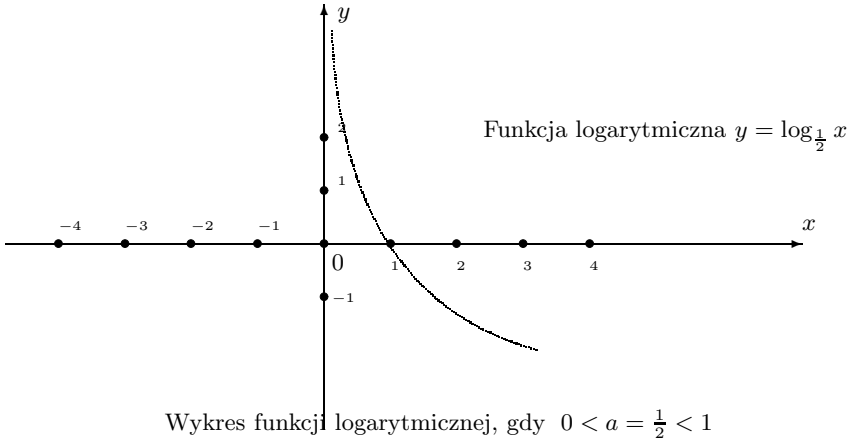
do funkcji wykładniczej

$$y = 2^x, \qquad -\infty < x < \infty$$



Wykres funkcji logarytmicznej, gdy $a > 1$

Wykres funkcji logarytmicznej malejąca dla podstawy logarytmu $0 < a = \frac{1}{2}$.



Wykres funkcji logarytmicznej, gdy $0 < a = \frac{1}{2} < 1$

16.1 Logarytm naturalny

Logarytme naturalny jest odwrotą funkcją do funkcj potęgowej

$$y = e^x, \qquad lub \qquad y = Exp[x], \qquad -\infty < x < \infty.$$

Tutaj podstawa

$$e = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699 95...;$$

jest liczbą rzeczywistą o nieskończonej ilości cyfr.

16.1.1 Własności funkcji logarytmicznej

1. Wartość funkcji logarytmicznej

$$y = g(x) = \log_a x$$

dla $x = 1$ równa jest zero.

$$g(1) = log_a\, 1 = 0, \quad poniewaz \;\; a^0 = 1, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$

2. Wartość funkcji logarytmicznej
$$y = g(a) = \log_a x$$
dla $x = a$ równa jest jeden.
$$g(a) = log_a = 1, \quad poniewaz \;\; a^1 = a, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$

3. funkcja logarytmiczna od iloczynu argumentów równa jest sumie wartości
$$log_a \; x * t = log_a x + log_a \; t, \;\; x > 0, \;\; t > 0, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$
W symbolach ogólnych tą własność piszemy
$$g(x) = \log_a \; x, \;\; g(x * t) = g(x) + g(t), \;\; x > 0, \;\; t > 0.$$
Istotnie sprawdzamy, że
$$y_1 = log_a \; x, \qquad to \qquad x = a^{y_1}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1,$$
$$y_2 = log_a \; t, \qquad to \qquad t = a^{y_2}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$
Skąd znajdujemy
$$\begin{aligned} x * t &= a^{y_1} * a^{y_2} = a^{y_1 + y_2}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1. \\ log_a \; x * t &= \log_a \; a^{y_1 + y_2} = y_1 + y_2 = log_a \; x + log_a \;\; t \end{aligned}$$

4. funkcja logarytmiczna od ilorazu argumentów równa jest różnicy wartości
$$log_a \; \frac{x}{t} = log_a \; x - log_a \; t, \;\; x > 0, \;\; t > 0, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$
W symbolach ogólnych tą własność piszemy
$$g(x) = \log_a \; x, \;\; g(\frac{x}{t}) = g(x) - g(t), \;\; x > 0, \;\; t > 0.$$
Istotnie sprawdzamy, że
$$y_1 = log_a \; x, \qquad to \qquad x = a^{y_1}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1,$$
$$y_2 = log_a \; t, \qquad to \qquad t = a^{y_2}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$
Skąd znajdujemy
$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &= \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1 - y_2}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1. \\ log_a \; \frac{x}{t} &= \log_a \; a^{y_1 - y_2} = y_1 - y_2 = log_a \; x - log_a \;\; t \end{aligned}$$

5. funkcja logarytmiczna od argumentu x^k, $k = 0, 1, 2, 3, ...,$; równa jest iloczynowi wykładnika potęgi k razy logarytm podstawy potęgi x
$$log_a \; x^k = k * log_a x, \quad x > 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$
Własność ta bezpośrednio wynika z własności 2 o logarytmie z iloczynu. Mianowicie
$$log_a \; x^k = \underbrace{\log_a \; x * x * \cdots * x}_{k} = \underbrace{\log_a \; x + \log_a \; x + \cdots + log_a \; x}_{k} = k * \log_a \; x$$

6. funkcja logarytmiczna od argumentu $x^{\frac{m}{n}}$ równa jest logarytmowi
$$\log \; x^{\frac{m}{n}} = m * \log \; \sqrt[n]{x}$$
Mianowicie sprawdzamy korzystając z własności funkcji logarytmiczej i wykładniczej
$$\log_a \; x^{\frac{m}{n}} = \underbrace{\log_a \; \sqrt[n]{x} + \log_a \; \sqrt[n]{x} + \cdots + log_a \; \sqrt[n]{x}}_{m} = m * \log_a \; \sqrt[n]{x}.$$

7. Przy założeniach $a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1,\ b > 0$, możemy zmienić podastawę a logarytmu $log_a\ b$ na podstawę c według wzoru

$$log_a\ b = \frac{log_{\ c}\ b}{log_c\ a}$$

Dla sprawdzenia tego wzoru wprowadźmy oznaczenia

$$p = \log_a\ b, \quad q = \log_c\ b, \quad r = \log_c\ a$$

Z definicji logarytmu mamy

$$b = a^p, \quad b = c^q, \quad a = c^r$$

Skąd wynika równość

$$\begin{array}{ll} b = (c^r)^p, & b = c^{p*r}, \\ \log_c\ b = p * r \log_c c, & \log_c c = 1, \\ \log_c b = p * r, & \log_c b = \log_a b * \log_c a, \\ \log_a b = \dfrac{log_c b}{\log_c a}, & \end{array}$$

8. W przypadku $c = b$ zamiana podstawy z liczbą logarytminowaną b prowadzi do odwrotności logarytmu

$$log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Rzeczywiście z własności 7, dla $c = b$ mamy

$$log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}, \quad bo \quad \log_b b = 1$$

Przykład 16.1 *Oblicz logarytm*

$$(i) \quad \log_2 64, \qquad (ii) \quad \log_5 125$$

Prosto z definicji logarytmu obliczamy

$$(i) \quad \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6, \quad bo \quad 2^6 = 64,$$

$$(ii) \quad \log_5 125 = \log_5 5^5 = 5 \quad bo \quad 5^5 = 125.$$

Przykład 16.2 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$\begin{array}{ll} (i) & \dfrac{\log_3 625}{\log_3 5}, \\ (ii) & \dfrac{\log_8 5}{\log_2 5}, \\ (iii) & \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5), \end{array}$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$\begin{array}{ll} (i) & \dfrac{\log_3 625}{\log_3 5} = \dfrac{\log_3 5^4}{\log_3 5} = \dfrac{4\log_3 5}{\log_3 5} = 4 \\ (ii) & \dfrac{\log_8 5}{\log_2 5} = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 8 \log_2 5} = \dfrac{1}{\log_2 2^3} = \dfrac{1}{3} \\ (iii) & \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5) = \log_2 \dfrac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 5} = \dfrac{1}{2} * \dfrac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 \sqrt{5}} = \log_2 \dfrac{1}{2} = -1 \end{array}$$

Przykład 16.3 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \log_2(\log_4\ 16),$$

$$(ii) \quad \log_3(\log_5 125).$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$(i) \quad \log_2(\log_4 16) = \log_2 2 \log_4 4 = \log_2 2 = 1,$$

$$(ii) \quad \log_3(\log_5 125) = \log_3 \log_5 5^3 = \log_3 3 \log_5 5 = \log_3 3 = 1,$$

Zadanie 16.1 *Oblicz logarytm*

$$(i) \quad \log_3 81, \qquad (ii) \quad \log_7 16807$$

Zadanie 16.2 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \frac{\log_7 3125}{\log_7 5},$$

$$(ii) \quad \frac{\log_9 8}{\log_3 2},$$

$$(iii) \quad \log_3(\log_3 \sqrt{7}) - \log_3(\log_3 7),$$

Zadanie 16.3 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \log_5(\log_5 3125),$$

$$(ii) \quad \log_4(\log_3 6561).$$

16.2 Równania logarytmiczne

Równanie w którym niewiadoma występuje pod znakiem logarytmu nazywa się równaniem logarytmicznym. Rozwiązując równanie logarytmiczne w pierwszej kolejności należy określić dziedzinę równania. To jest ten zbiór argumentu x dla którego równanie logarytmiczne ma sense liczbowy. W dziedzinie równania logarytmicznego szukamy jego pierwiastaka. Określenie dziedziny równania jest istotne, ponieważ rozwiązując równanie orginalne przekształcamy to równania w równania o prosztrzej strukturze, które mogą mieć pierwiastki spoza dziedziny równania orginalnego, nazywane pierwiastkami obcymi. Metody rozwiązywania równań logarytmicznych oparte są na własnościach funkcji logarytmicznej i wykładniczej. Niżej na przykładach wyjaśniamy sposoby rozwiązywania równań logarytmicznych.

Przykład 16.4 *Rozwiąż równanie*

$$\log_2 x = 4$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu x. Zatem dziedziną tego równania jest zbiór $x > 0$. piszemy

$$0 < x < \infty \quad lub \quad x \in (0, \infty).$$

Z definicji logarytmu jako funkcji odwrotnej do funkcji wykładniczej wynika równość

$$x = 2^4 = 16.$$

Sprawdzamy, że rozwiązanie $x = 16 \in (0, \infty)$ należy do dziedziny równania oraz

$$\log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4, \qquad \log_2 2 = 1.$$

Przykład 16.5 *Rozwiąż równanie*

$$\log_3(5 - x) + \log_3(5 + x) = 2$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$5 - x > 0 \quad i \quad 5 + x > 0.$$

Zatem dziedziną tego równania jest zbiór

$$x < 5 \ \ lub \ \ x > -5.$$

Wtedy piszemy dziedzinę tego równania jako odcinek otwarty

$$-5 < x < 5 \ \ lub \quad x \in (-5, 5).$$

Z własności sumy logarytmów wynika równość

$$\log_3(5 - x) + \log_3(5 + x) = \log_3(5 - x)(5 + x) = 2.$$

Z definicji logarytmu mamy równość

$$(5 - x)(5 + x) = 3^2, \quad lub \ \ 25 - x^2 = 9 \ \ lub \ \ x^2 = 16.$$

Obliczamy pierwiastki kwadratowe

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt{16} = 4.$$

Skąd mamy dwa rozwiązania

$$gdy \quad |x| = 4 \ \ to \quad x_1 = -4 \quad lub \quad x_2 = 4.$$

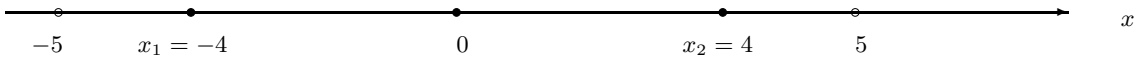
Sprawdzamy, że rozwiązanie $x_1 = -4 \in (-5, 5)$ i $x_2 = 4 \in (-5, 5)$ należy do dziedziny równania

$$\log_3(5 + 4) + \log_3(5 - 4) \quad = \quad \log_3 9 * 1 = \log_3 3^2 = 2$$

$$oraz$$

$$\log_3(5 - 4) + \log_3(5 + 4) \quad = \quad \log_3 1 * 9 = \log_3 3^2 = 2.$$

Zauważamy, że oba rozwiązania $x_1 = -4 \in (-5, 5)$ i $x_2 = 4 \in (-5, 5)$ należą do dziedziny tego równania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Oś liczbowa. Dziedzina równania przedział otwarty $(-5, 5)$

Przykład 16.6 *Rozwiąż równanie*

$$\log_3(x - -2) + \log_3(x - 4) = 1$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$x - 2 > 0 \quad i \quad x - 4 > 0.$$

Zatem dziedziną tego równania jest zbiór

$$x > 2 \ \ lub \ \ x > 4.$$

Wtedy piszemy dziedzinę tego równania jako odcinek nieskończony lewo stronnie otwarty

$$x > 4 \ \ lub \quad x \in (4, \infty).$$

Z własności sumy logarytmów wynika równość

$$\log_3(x-2)+\log_3(x-4)=\log_3(x-2)(x-4)=1.$$

Z definicji logarytmu mamy równość

$$(x-2)(x-4)=3^1, \quad lub \;\; x^2-6x+8=3 \;\; lub \;\; x^2-6x+5=0.$$

Obliczamy pierwiastki równania:
Wyróżnik równania

$$x^2-6x+5=0$$

o współczynnikach $a=1, \overline{=}-6,\ c=5$

$$\Delta=b^2-4*a*c=6^2-4*1*5=36-20=16.$$

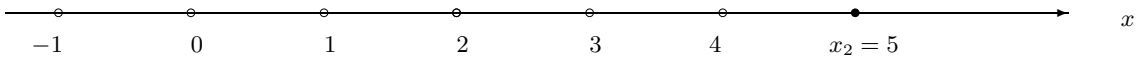
Skąd obliczamy pierwiastki równania

$$x_1=\frac{1}{2}(6-\sqrt{16})=\frac{6-4}{2}=1, \quad x_2=\frac{1}{2}(6+\sqrt{16})=\frac{6+4}{2}=5.$$

Sprawdzamy, że obcy pierwiastek $x_1=1\notin(4,\infty)$ nie należy do dziedziny równania, natomiast pierwiastek $x_2=5\in(4,\infty)$ należy do dziedziny równania. Zatem sprawdzamy, że drugi pierwiastek $x_2=5$ spełnia równanie

$$\log_3(5-2)+\log_3(5-4) \quad = \quad \log_3 3*1=\log_3 3=1$$

Zauważamy, że tylko pierwiastek $x_2=5\in(4,\infty)$ należy do dziedziny tego równania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Oś liczbowa. Dziedzina równania przedział otwarty $(4,\infty)$

Przykład 16.7 *Rozwiąż równanie*

$$\log_2(\log_4\ x)=1.$$

Rozwiązanie:
Dziedziną tego równania jest zbór tych x dla których

$$\log_4\ x>1, \qquad x>4, \qquad x\in(4,\infty)$$

Z definicji logarytmu wiemy, że jeżeli

$$\log_4\ x=2^1$$

to

$$x=4^2, \qquad x=16.$$

Rozwiązanie $x=16\in(4,\infty)$ należy do dziedziny.

Sprawdzamy, że $x=16$ spełnia równanie

$$\begin{aligned}\log_2(\log_4\ 16) &= \log_2(\log_4 4^2)\\ &= \log_2(2\log_4 4)\\ &= \log_2 2=1\end{aligned}$$

16.2.1 Zadania

Zadanie 16.4 *Podaj dziedzinę i znajdź rozwiązanie równania*

$$\log_4 x = 3$$

Zadanie 16.5 *Podaj dziedzinę i znajdź rozwiązanie równania*

$$\log_4(1-x) - \log_4(1+x) = 0.$$

Zadanie 16.6 *Rozwiąż równanie*

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-2) = 1$$

Zadanie 16.7 *Rozwiąż równanie*

$$2\log(x-1) = 1$$

Zadanie 16.8 *Rozwiąż równanie*

$$\log_4(\log_8\ x) = 1.$$

Chapter 17

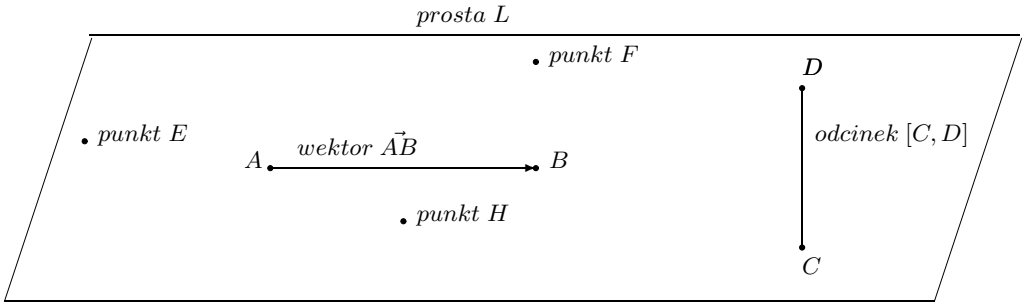
Geometria płaska. Planimetria

17.1 Wstęp

Geometria Euklidesowa, która obejmje geometrię płaską i geometrie przestrzenną wchodzi do podstawy programu nauczania na poziomie podstawowym i średnim. W szkole podstawowej do programu rozszerzonnego matematyki wchodzą tylko niektóre tematy wsparte ćwiczeniami, które są opisane w tym rozdziale.
Zakres geometrii płaskiej obejmuje konstrukcje z linijką i cyrklem figur płaskich oraz związki miarowe w trójkątach, prostokątach, równoległobokach, w okręgach i w wielokątach foremnych.

17.2 Punkty, odcinki i wektory na płaszczyźnie

Punkty, proste i płaszczyzny są pojęciami pierwotnymi, nie wymagają definicji. Punkt rozumiany jest jako figura geometryczna bezwymiarowa. Prosta to przestrzeń euklidesowa jednowymiarowa, która składa się z punktów współliniowych. Podobnie płszczyzna tworzy przestrzeń euklidesową złożoną z punktów współpłaszczyznowych. Punkty położone na prostej lub na płaszczyźnie oznaczamy dużymy literami $A, B, C, ...$; Odcinek o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczamy symbolem $[A, B]$. Długość odcinka $[A, B]$ o początku A i końcu B oznaczamy symbolem $|AB|$.
Wektorem o paczątku w punkcie A i końcu w punkcie B nazywamy odcinek skierowany $\vec{AB}$ o zwrocie od A do B. Długość wektora $|\vec{AB}|$ równa jest długości odcinka $|AB|$.



17.3 Położenie fiugur geometrycznych na płaszczyźnie.

Położenie figur geometrycznych na płaszczyźnie określamy we współrzędnych kartezjńskich.
W kartezjańskim układzie współrzędnych współrzędne punktów

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

piszemy w nawiasach zwykłych. Natomiast wektor

$$\vec{AB} = [a_2 - a_1, b_2 - b_1]$$

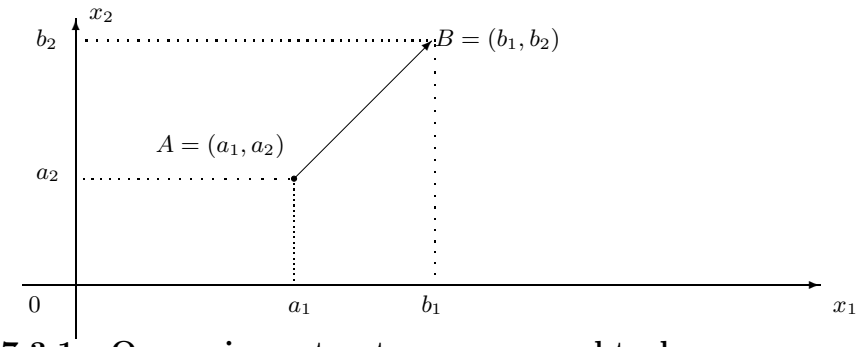
o współrzędnych różnicy współrzędnych punktów A i B piszemy w nawiasach kwadratowych.

Przykład 17.1 *Niech punkty $A = (3, 1.5)$ i $B = (5, 3.5)$ tworzą wektor $\vec{AB}$ o puczątku A i końcu B. Wtedy wektor*

$$\vec{AB} = [5 - 3, 3.5 - 1.5] = [2, 2]$$

ma współrzędne $x_1 = 2, \ x_2 = 2$.

Kartetezjański układ współrzędnych



17.3.1 Operacje arytmetyczne na punktach

Dodawanie punktów. Suma dwóch punktów

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

równa jest punktowi

$$P = (p_1, p_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

o współrzędnych $p_1 = a_1 + b_1 \quad i \quad p_2 = a_2 + b_2$.

Przykład 17.2 *Oblicz sumę punktów*

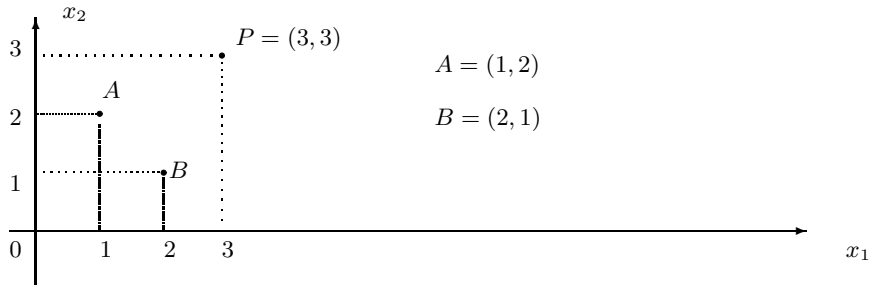
$$A = (1, 2) \quad i \quad B = (2, 1)$$

Rozwiązanie. Suma

$$A + B = (1, 2) + (2, 1) = (1 + 2, 2 + 1) = (3, 3)$$

Odpowiedź: Sumą danych punktów $A = (1, 2)$ i $B = (2, 1)$ jest trzeci punkt $P = (3, 3)$. o współrzędnych $x_1 = 3, \ x_2 = 3$.
Niżej na rysunku podana jest geometryczna interpretacja sumy pnktów

$$A + B = (1, 2) + (2, 1)$$



Odejmowanie punktów. Różnica dwóch punktów

$$A = (a_1, a_2) \quad i \quad B = (b_1, b_2)$$

równa jest punktowi $P = (p_1, p_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$
o współrzędnych $p_1 = a_1 - b_1 \quad i \quad p_2 = a_2 - b_2$.

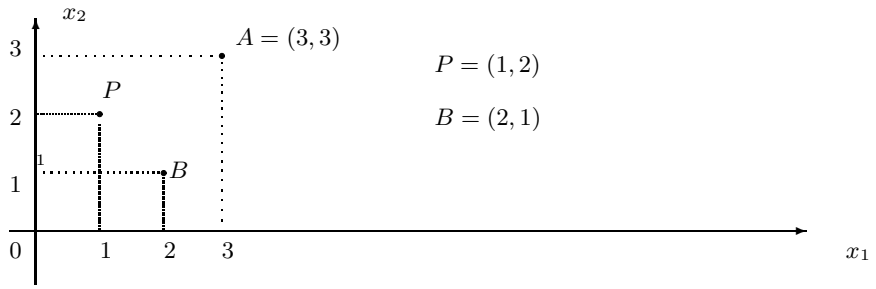
Przykład 17.3 *Oblicz różnicę punktów*

$$A = (1,2) \quad i \quad B = (2,1)$$

Rozwiązanie. Różnica

$$A - B = (3,3) - (2,1) = (3-2, 3-1) = (1,2)$$

Odpowiedź: Różnicą danych punktów $A = (3,3)$ i $B = (2,1)$ jest punkt $P = (1,2)$.



17.3.2 Wektory na płaszczyźnie

Niech dane będą punkty $A = (a_1, a_2)$ i $B = (b_1, b_2)$.
Wektor $\vec{AB}$ o początku w punkcie $A = (a_1, a_2)$ i końcu w punkcie $B = (b_1, b_2)$ określamy jako różnica punktów

$$\vec{AB} = B - A = [b_1 - a_1, b_2 - a_2].$$

[2] [3] Na przykład wektor związany o początku w punkcie $A = (0,1)$ i końcu w punkcie $B = (2,0)$ ma współrzędne

$$\vec{AB} = b - a = (2,0) - (0,1) = [2, -1].$$

17.3.3 Operacje arytmetyczne na wektorach

Dodawanie wektorów
Suma dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2]$$

równa jest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2] = [v_1 + w_1, v_2 + w_2]$$

o współrzędnych $z_1 = v_1 + w_1 \quad i \quad z_2 = v_2 + w_2$.

[1] Nie ma pojęcia iloczynu lub ilorazu punktów
[2] współrzędne v_1, v_2 wektora swobodnego $\vec{v} = [v_1, v_2]$ piszemy w nawiasach kwadrawtowych.
[3] Wektor swobodny określony jest przez jego długość, kierunek i zwrot, nie zależy od położenia na płaszczyźnie.

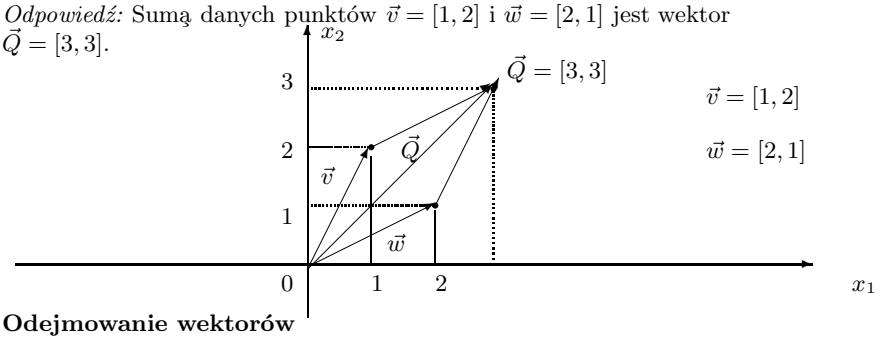
Przykład 17.4 *Oblicz sumę wektorów*

$$\vec{v} = [1, 2] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1]$$

Rozwiązanie. Suma

$$\vec{v} + \vec{w} = [1, 2] + (2, 1) = [1 + 2, 2 + 1] = [3, 3]$$

Odpowiedź: Sumą danych punktów $\vec{v} = [1, 2]$ i $\vec{w} = [2, 1]$ jest wektor $\vec{Q} = [3, 3]$.



Odejmowanie wektorów

Różnica dwóch wektorów $\vec{v} = [v_1, v_2] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2]$ równa jest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2] = \vec{v} - \vec{w} = [v_1 - w_1, v_2 - w_2]$$

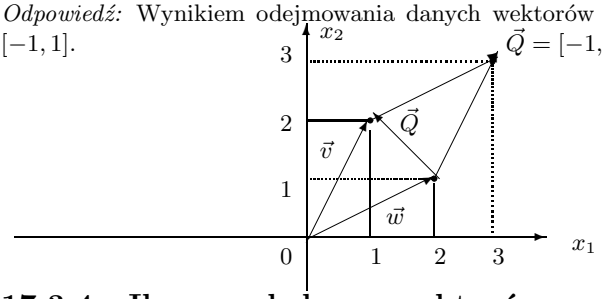
o współrzędnych $z_1 = v_1 - w_1 \quad i \quad z_2 = v_2 - w_2$.

Przykład 17.5 *Oblicz różnice wektorów* $\vec{v} = [1, 2] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1]$

Rozwiązanie. Oblkiczamy różnicę wektorów

$$\vec{v} - \vec{w} = [1, 2] - [2, 1] = [1 - 2, 2 - 1] = [-1, 1]$$

Odpowiedź: Wynikiem odejmowania danych wektorów $\vec{v} = [1, 2]$ i $\vec{w} = [2, 1]$ jest wektor $\vec{Q} = [-1, 1]$.



17.3.4 Iloczyn skalarny wektorów

[4] Iloczyn skalarny wektorów jest ważną operacją na wektorach stosowaną w matematyce stosowanej, w fizyce, chemii i w innych przedmiotach ścisłych.

Defimnicja 17.1 *Iloczynem skalarnym wektorów* $\vec{v} = [v_1, v_2]$ *i* $\vec{w} = [w_1, w_2]$ *nazywamy liczbę*

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 \tag{17.1}$$

Wartość iloczynu skalarnego wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą

Przykład 17.6 *Oblicz iloczyn skalarny wektorów*

$$\vec{v} = [2, 5] \quad i \quad \vec{w} = [7, 3].$$

[4] Wielokość skalarna to znaczy, że jej wartość jest liczbą

Rozwiązanie. Stosując wzór (17.1) obliczamy iloczyn skalarny danych wektorów, piszemy

$$(\vec{v},\vec{w}) = ([2,5]*[7,3]) = 2*7+5*3 = 14+15 = 29.$$

Odpowiedź: Wartość iloczynu skalarnego danych wektorów $\vec{v}=[2,5]$ i $\vec{w}=[7,3]$ jest liczbą 29, piszemy

$$(\vec{v},\vec{w}) = 29.$$

Iloczyn skalarny wektorów zachowuje wszystkie własności operacji mnożenia.
Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v}=[v_1,v_2] \qquad i \qquad \vec{w}=[w_1,w_2]$$

- iloczn skalarny jest przemienny

$$(\vec{v},\vec{w}) = (\vec{w},\vec{v})$$

Istotnie, sprawdzamy, że

$$(\vec{v},\vec{w}) = v_1*w_1+v_2*w_2 = w_1*v_1+w_2*v_2 = (\vec{w},\vec{v})$$

- mnożenie skalarne wektorów jest rozdzielne względem dodawania

$$(\vec{v},(\vec{w}+\vec{Q})) = (\vec{v},\vec{w})+(\vec{v},\vec{Q})$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$\begin{aligned}(\vec{v},\vec{w}+\vec{Q}) &= v_1*(w_1+z_1)+v_2*(w_2+z_2)\\ &= v_1*w_1+v_1*z_1+v_2*w+2+v_2*z_2\\ &= \underbrace{v_1*w_1+v_2*w_2}_{(\vec{v},\vec{w}}+\underbrace{v_1*z_1+v_2*z_2}_{(\vec{v},\vec{Q})}\\ &= (\vec{v},\vec{w})+(\vec{v},\vec{Q})\end{aligned}$$

- Iloczyn skalarny wektora $\vec{v}$ przez siebie równy jest kwadratowi jego długości

$$(\vec{v},\vec{v}) = v_1*v_1+v_2*v_2 = v_1^2+v_2^2 = |\vec{v}|^2$$

Teraz podamy twierdzenie ważne w zastosowniach.

Twierdzenie 17.1 *Wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero, piszmy*

$$\vec{v}\perp\vec{w} \Longleftrightarrow (\vec{v},\vec{w}) = 0.$$

Dowód. Istnieje kilka dowodów tego twierdzenia. Tutaj podamy dowód oparty na twierdzeniu Pitagorasa. Mianowicie, udowodnimy, że trójkąt o ramionach $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

Obliczamy kwadrat długości różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$

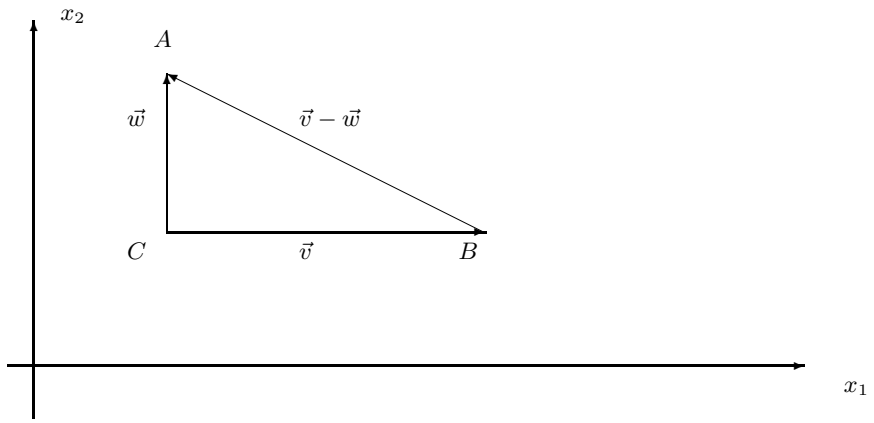
$$\begin{aligned}|\vec{v}-\vec{w}|^2 &= (\vec{v}-\vec{w},\vec{v}-\vec{w})\\ &= (\vec{v},\vec{v})-2(\vec{v},\vec{w})+(\vec{w},\vec{w})\\ &= |\vec{v}|^2-2(\vec{v},\vec{w})+|\vec{w}|^2\end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli iloczyn skalarny jest równy zero

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

to boki trójkąta ΔABC

$$|AB| = |\vec{v}|, \quad |AC| = |\vec{w}|, \quad |BC| = |\vec{v} - \vec{w}|$$



spełniają równość

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |v \vec{-} w|^2 \tag{17.2}$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Z drugiej strony suma kwadratów dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości boku trzeciego wtedy i tylko wtedy, jeżeli ten trójkąt jest prostokątny.
Zatem kąt $\angle ACB$ pomiędzy wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prosty wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny tych wektorów równy jest zero.
Koniec dowodu.
Zauważmy, że iloczyn skalarny wektorów jest związany z twierdzeniem Pitagorasa, Istotnie, warunek prostopadłości wektorów [5] [6]

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

jest równoważny z tezą twierdzenia Pitagorasa o trójkącie prostokątnym.

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |v \vec{-} w|^2.$$

Przykład 17.7 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [6, 8], \quad \vec{w} = [9, 12].$$

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (17.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [6, 8], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2] = [9, 12]$$

Zatem iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 6 * 9 + 8 * 12 = 54 + 96 = 150.$$

równy jest 100.
Wiemy, że kwadrat długości wektora $\vec{v} = [6, 8]$ jest równy iloczynowi skalarnemu tego wektora przez siebie.

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = 6 * 6 + 8 * 8 = 36 + 64 = 100$$

[5] Wartość iloczynu skalarnego wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą.
[6] Zauważmy, że znikanie iloczynu skalarnego $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym prostopadłości wektorów $\vec{v}, \vec{w}$, w symbolach piszemy $\vec{v} \perp \vec{w} \iff (\vec{v}, \vec{w}) = 0$.

Skąd długość wektora

$$|\vec{v}| = \sqrt{100} = 10.$$

Podobnie obliczamy długość wektora $\vec{w} = [9, 12]$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} = \sqrt{9 * 9 + 12 * 12} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

Przykład 17.8 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 6], \quad \vec{w} = [3, 2].$$

są prostopadłe?

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (17.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2]$$

Wektory są prostopadłe jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero. Obliczamy iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = m * 3 + 6 * 2 = 3m + 12 = 0.$$

Skąd iloczyn skalarny równy jest zero

$$6m + 12 = 0, \quad dla \quad m = -\frac{12}{3} = -4.$$

Istotnie sprawdzamy, że dla $m = -4$ iloczyn skalarny wektora $\vec{v} = [m, 6]$ przez wektor $\vec{w} = [3, 2]$ równy jest zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = -4 * 3 + 6 * 2 = 0$$

Odpowiedź: Wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2]$$

są prostopadłe dla parametru $m = -4$.

Zadanie 17.1 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [12, 16], \quad \vec{w} = [15, 20].$$

Zadanie 17.2 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 15], \quad \vec{w} = [5, 3].$$

są prostopadłe?

17.4 Konstrukcje podstawowe z cyrklem i linijką

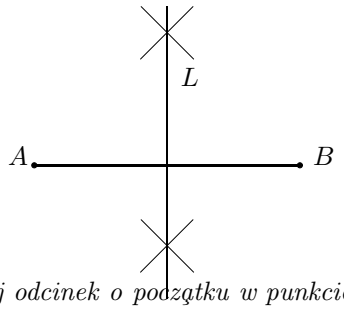
Do konstrukcji podstawowych przy pomocy cyrkla i linijki zaliczamy tutaj [7]

- konstrukcja symetralnej danego odcinka,
- konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej, która przechodzi przez dany punkt poza prostą,
- konstrukcja dwusiecznej danego kąta,
- konstrukcja prostych równoległych,
- konstrukcja trójkąt o danch bokach,
- konstrukcja czworokąta o danych bokach.

[7] Długość odcineka $[A, B]$ o początku A i końcu B oznaczamy symbolem $|AB|$

17.4.1 Konstrukcja symetralnej odcinka.

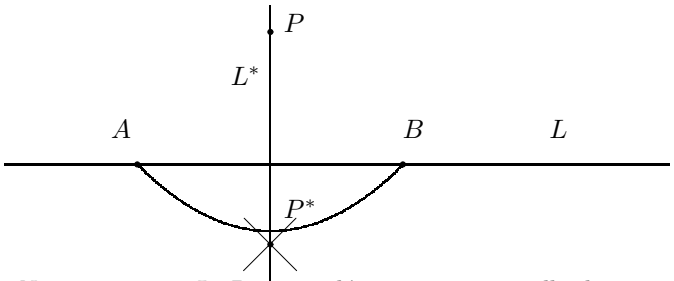
Niech dany będzie odcinek $[A, B]$ o długości $a = |AB|$. Stawiamy cyrkiel w punkcie A i rozwartością cyrkla większą od połowy odcinka $[A, B]$ zakreślamy dwa łuki nad odcinkiem i pod odcinkiem. Rysujemy prostą L przez punkty przecię łuków. Prosta L jest symetralną odcinka $[A, B]$.



Zadanie 17.3 *Narusuj odcinek o początku w punkcie A długości $6cm$ i o końcu w punkcie B. poprowadź symetralną odcinka $[A, B]$ przy pomocy cyrkla i linijki.*

17.4.2 Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej

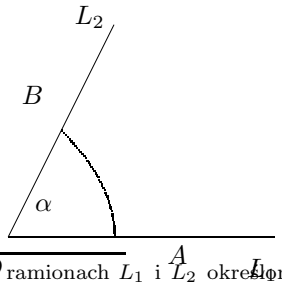
Niech dana będzie prosta L i punkt P. Stawiamy cyrkiel w danym punkcie P i zakreślamy łuk przeciający prostą L w punktach A i B. Stawiamy cyrkiel w punkcie A i zakreślamy łuk. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie B i zakreślamy łuk. Punkt przecięcia łuków oznaczamy literą P^*. Przez punkty P^* i P rysujemy prostą L^*, jak na rysunku niżej.



Zadanie 17.4 *Narusuj prostą L. Poprowadź prostą prostopadłą do prostej L przez dowolnie wybrany punkt P leżący poza prostą L, przy pomocy cyrkla i linijki.*

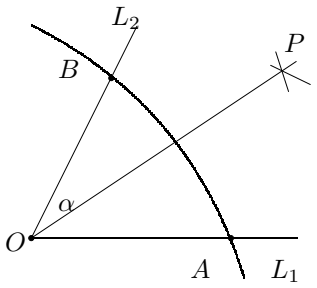
17.4.3 Konstrukcja dwusiecznej danego kąta

Niech będzie dany kąt α o wierzchołku w punkcie O i ramionach L_1 i L_2. [8]



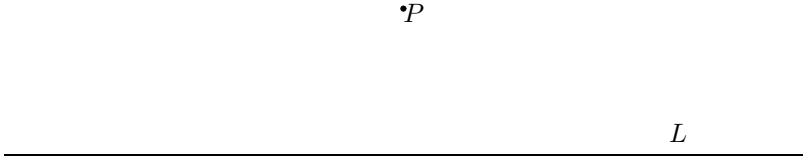
[8] Kąt α o wierzchołku O i ramionach L_1 i L_2 określonych przez punkty A i B oznaczamy symbolem $\angle AOB$

Stawiamy cyrkiel w wierzchołku O kąta α i zakreślamy łuk przecinający ramiona L_1 i L_2 w punktach A i B. Punkty A i B są równo odległe od punktu O, piszemy $|OA| = |OB|$. Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie A i zakreślamy łuk. Podobnie stawiammy cyrkiel w punkcie B i zakreślamy łuk. Punkt przecię cia łuków oznaczamy literą P. Przez punkty O i P prowadzimy dwusieczną kąta

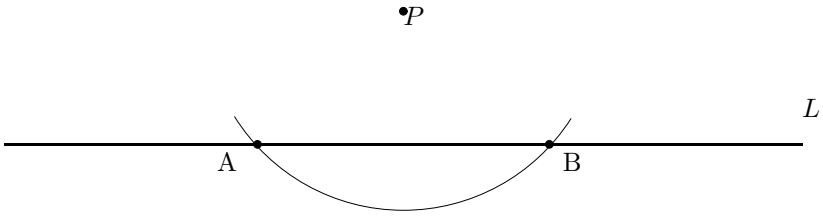


Zadanie 17.5 *Poprowadź dwusieczną kąta α danego niżej na rysunku przy pomocy cyrkla i linijki.*

Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej L. Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej L i przechodzącej przez dany punkt P oparta jest na rysowaniu równoległoboku.

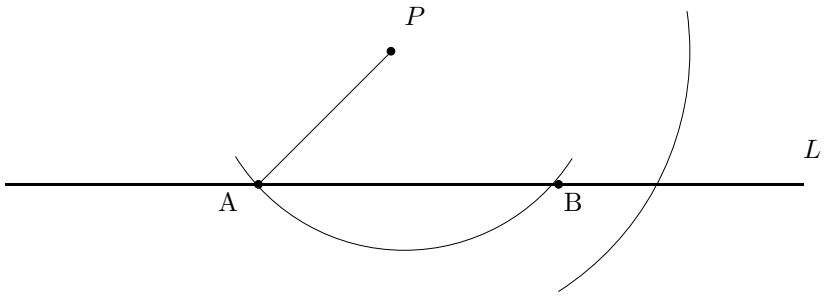


Opis konstrukcji. W pierwszym kroku konstrukcji stawiamy cyrkiel w danym punkcje P i zakreślamy łuk, który przecina daną prostą L w dwóch punktach A i B.

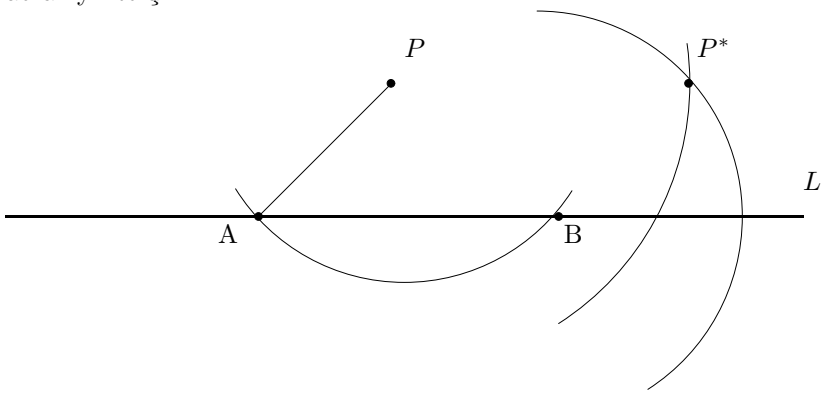


W drugim kroku konstrukcji łączymy punkt A przecięcia z danym punktem P linijką.

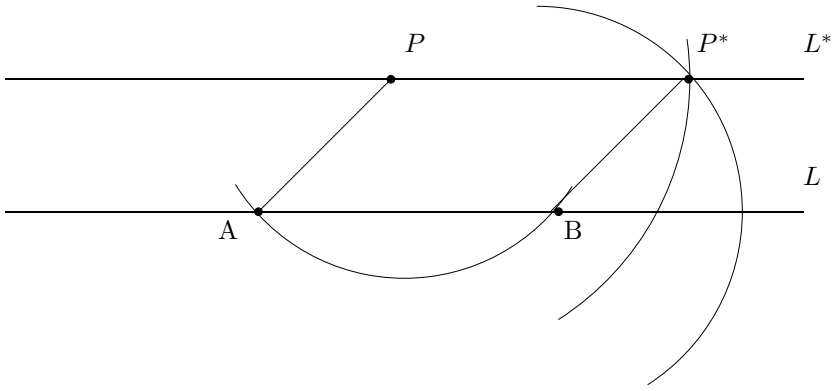
Następnie stawiamy cyrkiel w punkcie B i rozwartością cyrkla równą odległości $|AP|$ punktu A od punktu P zakreślamy łuk.



W trzecim kroku konstrukcji stawiamy cyrkiel w punkcie P i rozwartością cyrkla równą odległości $|AB|$ punktu A od punktu B zakreślamy drugi łuk. Punkt przecięcia łuków oznaczamy literą P^*.



W czwartym kroku konstrukcji, rysyjemy z linijką prostą przez punkty P i P^*. W końcu konstrukcji łączymy z linijką punkty B i P^*.



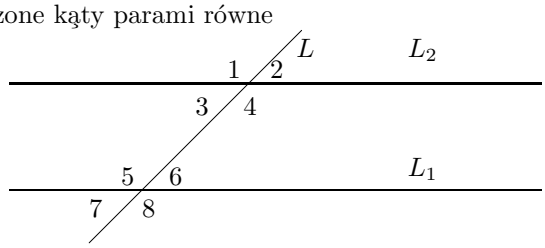
Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy równoległobok $ABPP^*$, którego bok $[P, P^*]$ leży na prostej L^* równoległej do prostej L przechodzącej przez dany punkt P.

Zadanie 17.6 *Narysuj prostą równoległą do prostej na rysunku i przechodzącej przez dany ponkt*

•

17.4.4 Dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą

Rozpatrzmy dwie proste równoległe L_1 i L_2 przecięte trzecią prostą L. Niżej na rysunku mamy zaznaczone kąty parami równe



Dwie linie proste równoległe L_1 i L_2 przecięte trzecią prostą L

- kąty wierzchołkowe parami równe

$$\angle\, 1 = \angle\, 4, \quad \angle\, 2 = \angle\, 3, \quad \angle\, 5 = \angle\, 8, \quad \angle\, 6 = \angle\, 7$$

- kąty odpowiadające parami równe

$$\angle\, 1 = \angle\, 5, \quad \angle\, 3 = \angle\, 7, \quad \angle\, 2 = \angle\, 6, \quad \angle\, 4 = \angle\, 8$$

- kąty naprzemianległe wewnętrzne parami równe

$$\angle\, 3 = \angle\, 6, \quad \angle\, 4 = \angle\, 5,$$

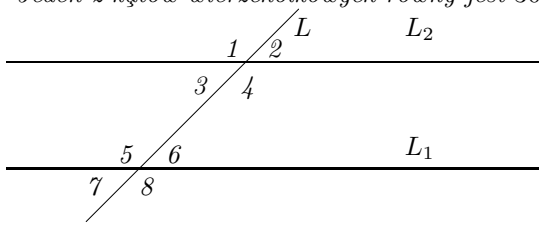
- kąty naprzemianległe zewnętrzne parami równe

$$\angle\, 1 = \angle\, 8, \quad \angle\, 2 = \angle\, 7,$$

- kąty przyległe, których suma równa jest 180^o

$\angle\, 1$ *przylega do* $\angle\, 2$, $\angle\, 3$ *przylego do* $\angle\, 4$, $\angle\, 1$ *przylega do* $\angle\, 3$,
$\angle\, 2$ *przylega do* $\angle\, 4$, $\angle\, 5$ *przylega do* $\angle\, 6$, $\angle 7$ *przylega do* $\angle\, 8$,
$\angle\, 5$ *przylega do* $\angle\, 7$, $\angle\, 6$ *przylega do* $\angle\, 8$

Zadanie 17.7 *Jeden z kątów wierzchołkowych równy jest* 30^0.



Dwie linie proste równoległe przecięte trzecią prostą

Oblicz wszystkie kąty
(a) wierzchołkowe
(b) naprzemian ległe
(c) odpowiadające
(d) przyległe wewnętrzne
(e) przyległe zewnętrzne
Zaznacz wartości wszystkich kątów na rysunku

17.5 Okrąg i koło

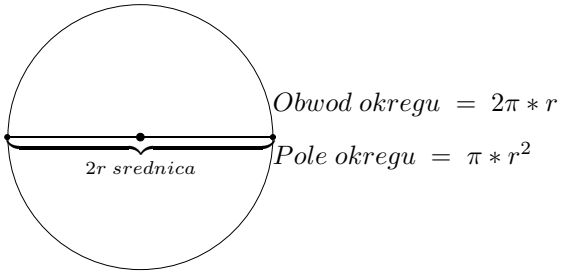
Obszar wewnątrz okręgu nazywamy kołem.

Obwód okręgu

$$O_{obwod} = 2 * \pi * r,$$

pole koła

$$P_{okregu} = \pi * r^2, \qquad \pi \approx \frac{314}{100} = 3.14.$$

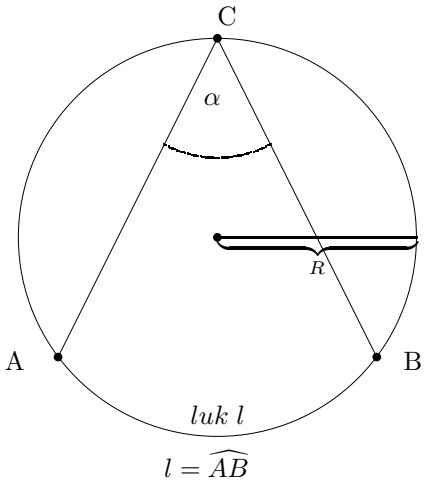


średnica okręgu równa jest 2 razy promień okręgu.

Zadanie 17.8 *Narysuj cyrklem okrąg o promieniu 3cm. Zaznacz kredką wnętrze okręgu jako koło o promieniu 3cm.*
Oblicz średnicę okręgu, obwód okręgu, pole koła.

17.5.1 Miara łukowa kąta

Rozpatrzmy okrąg o promieniu R



Miarę łukową kąta $\alpha = \angle BCA$ opartym na łuku $l = \widehat{AB}$ określamy jako stosunek długości łuku l do promienia R

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

Kąt pełny, który w mierze kątowej ma 360^0 oparty jest na łuku

$$l = 2\pi * R$$

równym obwodowi okręgu.
Zatem miara łukowa kąta pełnego równa jest

$$\alpha = \frac{2\pi * R}{R} = 2\pi$$

Podobnie kąt półpełny, który w mierze kątowej ma 180^0 oparty jest na łuku

$$l = \pi * R$$

równym połowie obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta półpełnego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{R} = \pi$$

Również kąt prosty, który w mierze kątowej ma 90^0 oparty jest na łuku

$$l = \frac{2\pi * R}{4} = \frac{\pi * R}{2}$$

równym czwartej części obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta prostego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{2R} = \frac{\pi}{2}$$

W istocie, miara łukowa kąta nie zależy od długo
'sci promienia R. Dlatego możemy przyjąć promień okręgu $R = 1$.
Jednostką miary łukowej kąta jest 1 radian. Kąt pełny ma $2 * \pi$ radianów, któremu w mierze kątowej odpowiada kąt 360^0. Zatem, jeden stopnień

$$1^0 = \frac{2 * \pi}{360} = \frac{\pi}{180} radianow$$

natomiast

$$1\ radian = \frac{180^0}{\pi}\ \ stopni$$

Przykład 17.1 *Oblicz miarę łukową kąta* 30^0.
Rozwiązanie. *Korzytamy z proporcji, kątowi* 180^0 *odpowiada miara łukowa tego kąta* π *radianów. Zatema kątowi* 30^0 *odpowiada miara łukowa* x *radianów. Tą proporcję piszemy równaniem*

$$\frac{\pi}{180} = \frac{x}{30}$$

Skąd obliczamy miarę łukową kąta 30^0

$$x = \frac{30 * \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

Zadanie 17.9 *Oblicz miarę łukwą kąta α, jeżeli jego miara kątowa równa jest*

$$(i) \qquad \alpha = 30^0$$

$$(ii) \qquad \alpha = 60^0$$

$$(iii) \qquad \alpha = 120^0$$

Zadanie 17.10 *Ile stopni ma kąt α, jeżeli jego miara łukowa równa jest*

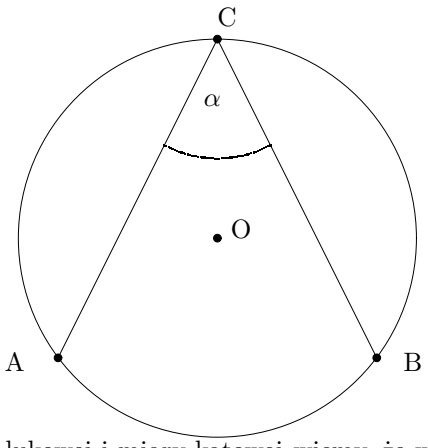
$$(i) \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} \qquad (ii) \quad \alpha = \frac{5\pi}{4}$$

$$(iii) \quad \alpha = \frac{4\pi}{3} \qquad (iv) \quad \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

$$(iii) \quad \alpha = \frac{7\pi}{6}$$

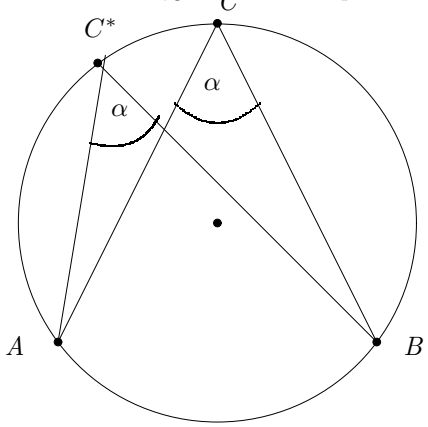
17.5.2 Kąt wpisany w okrąg i kąt środkowy

Kątem wpisanym w okrąg o promieniu R i środku w punkcie O nazywamy kąt α, którego wierzchołek C leży na okręgu a ramiona AC i BC przecinają okrąg w punktach A i B



Z określenia miary łukowej i miary kątowej wiemy, że wartość kąta wpisanego $\angle BCA = \alpha$ nie zależy od wielkości promienia R. Zatem zakładamy, że promień $R = 1$.

Lemma 17.1 *Wartość kąta $\angle BCA = \alpha$ wpisanego w okrąg jest stała niezależna od położenia wierzchołka C i promienia R okręgu o środku w punkcie O.*



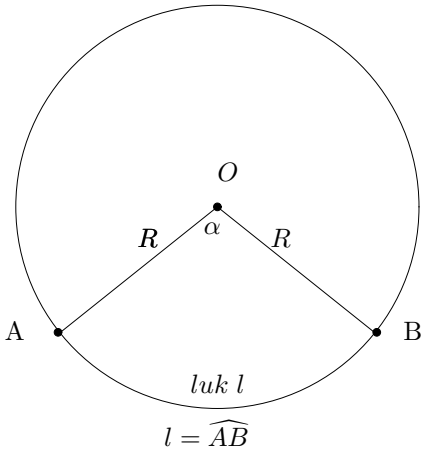
Położenie kąta $\angle BCA = \alpha$ wpisanego w okrąg w pozycji $C^* = \angle BC^*A = \alpha$, nie zmienia wartości α kąta wpiesanego w okrąg.
Istotnie kąt wpisany α o wierzchołku w punkcie C i o ramionach AC i BC przecina okrąg w punktach A i B. Kąt α oparty jest na łuku $l = \widehat{AB}$ radianów, w mierze kątowej równy jest

$$\alpha = \frac{l * \pi}{180^0}.$$

Jeżeli wierzchołek C porusza się po okręgu w kierunku punktu A to kąt wpisany $\alpha = \frac{l * \pi}{180^0}$, nie zmienia warotości, ponieważ długość łuku $l = \widehat{AB}$ pozostaje ta sama.
Jednak, jeżeli wierzchołek C pokryje się z punktem A to ramie AC zredukuje się do punktu A. Wtedy kąt wierzchołkowy α jest nieokreślony. Jeżeli wierzchołek C przekroczy punt A i dalej porusza się w kierunku punktu B to wtedy kąt wpisany α będzie oparty na łuku o długości $2\pi - l$, a jego miara kątowa

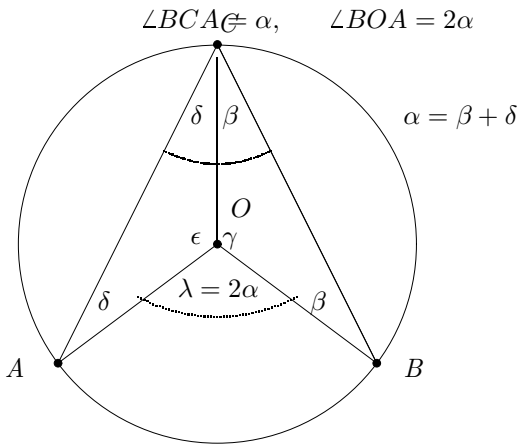
$$\alpha = \frac{(2\pi - l) * 180^0}{\pi}.$$

Kąt środkowy. Kątem środkowym nazywamy kąt pomiędzy promieniami okręgu $R = |AO|$ i $R = |BO|$ o wierzchołku w środku okręgu O.



17.5.3 Związek pomiędzy kątem środkowym i kątem wpisanym

Twierdzenie 17.2 *Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany w okrąg jest dwa razy większy od kąta wpisanego. Zatem mamy równość*



Podamy dwa dowody twierdzenia o kącie wpisanym i kącie środkowym.
Dowód 1. Z lematu 1 wiemy, że wartość kąta wpisanego α nie zależy od położenia jego wierzchołka C na okręgu.
Zatem możemy przyjąć położenie wierzchołka C na średnicy okręgu przechodzącej przez wierzchołek C i środek okręgu O.
Promienie okręgu $AO,\ BO$ i CO tworzą trójkąty ΔAOC i ΔBCO równorammienne i przystające.
Zatem ich kąty $\beta,\ \gamma$ i kąt środkowy $\angle BOA = \lambda$ spełniają równania

$$\alpha = 2\beta,$$

$$\gamma + 2\beta = \pi$$

$$2\gamma + \lambda = 2\pi.$$

Skąd obliczamy kąt środkowy

$$\lambda = 2\pi - 2\gamma = 2\pi - 2\underbrace{(\pi - 2\beta)}_{\gamma} = 4\beta = 2\alpha.$$

Dowód 2. Najpierw dowód podamy w przypadku, gdy środek okręgu O leży pomiędzy ramionami AC i BC kąta wpisanego $\angle BCA = \alpha$, następnie w przypadku, gdy środek okręgu O leży poza ramionami kąta wpisanego.
W przypadku pierwszym zauważamy, że trójkąty równoramienne ΔAOC, ΔBCO o ramionach równych promieniowi okręgu R mają kąty przy podstawach kąty równe. Trójkąt ΔAOC ma przy podstawie AC kąty równe δ i trójkąt ΔBCO ma przy podstawie BC kąty równe β. Kąt wpisany $\angle BCA = \alpha$ oznaczamy literą grecką α, a kąt środkowy $\angle AOB$ oznaczamy literą grecką λ, jak na rysunku.
Następnie zauważamy, że kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \lambda$ spełniają układ równań liniowych

$$\begin{aligned}
&\alpha = \beta + \delta, && \angle BCA \ wpisany\ \alpha \\
&2\beta + \gamma = \pi, && suma\ katow\ w\ trojkacie\ \Delta\ BCO\ rowna\ \pi \\
&2\delta + \epsilon = \pi, && suma\ katow\ w\ trokacie\ \Delta\ AOC\ rowna\ \pi \\
&\gamma + \epsilon + \lambda = 2\pi, && kat\ pelny\ rowny\ 2\pi
\end{aligned} \tag{17.3}$$

Układ równań liniowych (17.3) rozwiążemy metodą podstawiania.
Mianowicie, z równanania drugiego i trzeciego w układzie (17.3) obliczamy

$$\begin{aligned}
\gamma &= \pi - 2\beta, \\
\epsilon &= \pi - 2\delta
\end{aligned}$$

Skąd suma kątów

$$\gamma + \epsilon = 2\pi - 2(\beta + \delta)$$

Z równania czwartego w układzie równa(17.3) obliczamy kąt środkowy

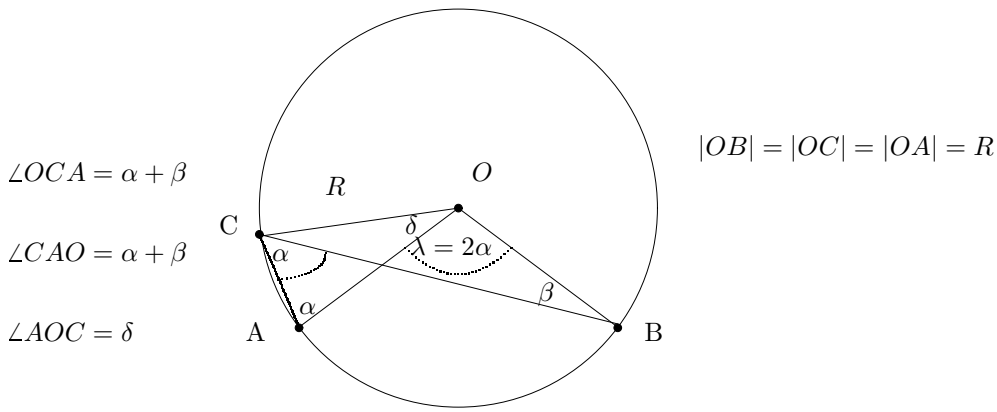
$$\lambda = 2\pi - (\gamma + \epsilon) = 2\pi - \underbrace{(2\pi - 2(\beta + \delta))}_{\gamma + \epsilon} = 2\underbrace{(\beta + \delta)}_{\alpha} = 2\alpha$$

Zatem, obliczyliśmy, że kąt środkowy λ jest dwa razy większy od kąta wpisanego α, piszemy

$$\lambda = 2\alpha$$

Koniec dowodu przypadku pierwszego.

Dowód. Dowód w przypadku drugim, gdy środek okręgu O leży poza ramionami AC i BC kąta wpisanego $\angle BCA = \alpha$.



Zauważamy, że trójkąty równoramienne ΔAOC i ΔBOC o ramionach równych promieniowi okręgu R mają przy podstawach $[AC]$ i $[CB]$ kąty równe, odpowiednio

$$\angle OCA = \angle CAO = \alpha + \beta \quad i \quad \angle CBO = \angle OCB = \beta.$$

Suma kątów w trójkątach ΔAOC i BOC równa jest 180^0 lub π, piszemy

$$\begin{aligned} \underbrace{\angle OCA + \angle CAO}_{2(\alpha+\beta)} + \underbrace{\angle AOC}_{\delta} = \pi \qquad & 2(\alpha+\beta) + \delta = \pi \\ \underbrace{\angle OBC + \angle OCB}_{2\beta} + \underbrace{\angle BOC}_{\delta+\lambda} = \pi \qquad & 2\beta + \delta + \lambda = \pi \end{aligned} \tag{17.4}$$

Układ równań liniowych (17.4) rozwiążemy metodą podstawiania.
Mianowicie, z pierweszgo równania obliczamy

$$\delta = \pi - 2(\alpha + \beta)$$

i podstawiamy do równania drugiego

$$2\beta + (\pi - 2(\alpha + \beta)) + \lambda = \pi, \qquad \lambda - 2\alpha = 0.$$

Skąd kąt środkowy $\angle BOA = 2\alpha$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego $\angle OCA = \alpha$, piszemy

$$\lambda = 2\alpha$$

lub

$$\angle BOA = 2\angle OCA.$$

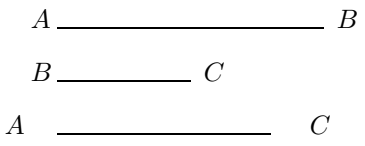
Koniec dowodu przypadku 2.

Wniosek: Kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest prosty, ma 90^0, w mierze łukowej ma $\frac{\pi}{2}$ radianów.

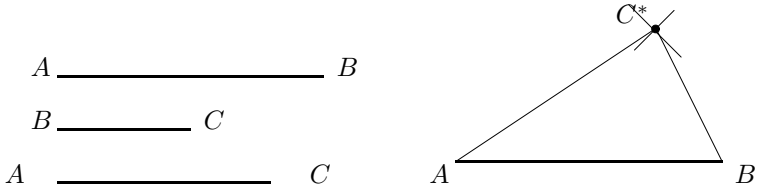
17.6 Trójkąty

17.6.1 Konstrukcja trójkąta o danych bokach

Niech będą dane trzy odcinki $[A,B]$, $[B,C]$, i $[A,C]$



Wybierzmy odcinek $[AB]$ jako podstawę trójkąta ΔABC. Rozwartością cyrkla równą długości odcinka $[A,C]$ zakreślamy łuk stawiając cyrkiel w punkcie A. Następnie rozwartością cyrkla równą długości odcinka $[B,C]$ zakreślamy łuk stawiając cyrkiel w punkcie B. Punkt przecięcia łuków C^* łączymy z punktami A i B podstawy tójkąta ΔABC^* [9]



Zauważmy, że trójkąt można zbudować z odcinków, które spełniają następującą nierówność trójkąta
Suma długości dwóch boków trójkąta jest większa od długości boku trzeciego, piszemy

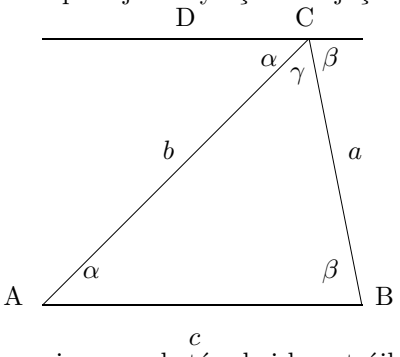
$$|AB| + |BC| \geq |AC|,$$

$$|AB| + |AC| \geq |BC|,$$

$$|AC| + |BC| \geq |AB|$$

17.6.2 Suma kątów trójkąta

Suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0, w mierze łukowej π radianów. Niżej rozpatrzmy geometryczną interpretaje sumy kątów trójkąta.



Z rysunku, zauważamy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0. Rzeczywiście, prosta DC jest równoległa do podstawy AB trójkąta ABC . Kąty naprzemianległe wewnętrzne α przy podstawie i α przy odcinku DC są równe, podobnie β przy podstawie AB i β przy

[9] Odcinek o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczamy symbolem $[A,B]$

odcinku DC są równe. Widzmy, że

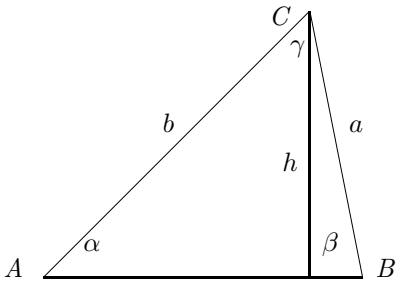
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

To znaczy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0.

17.6.3 Konstrukcja trójkąta o tych samych kątach i o bokach proporcjonalnych.

Na płaszczyżnie wybieram trzy różne punkty A, B i C i łączymy te punkty używając linijki. W ten sposób narysowaliśmy trójkąt. Boki AB i AC przedłużamy. Na przedłużonych bokach odkładamy odcinki równe długości boków AB i AC, odpowiednio. Łączymy zaznaczone końce odcinków. Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy drugi trójkąt który ma kąty te same co wcześniej narysowny trójkąt, natomiast boki ma dwa razy dłuższe. Rzeczywiście, oba trójkąty mają te same kąty, ponieważ bok BC jest równoległy do odpowiedniego boku większego trójkąta, jako kąty odpowiadające.

Przykład 17.2 *Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta.*



Trojkata ΔABC

Pole trójkąta

$$P_\Delta = \frac{a * h}{2}$$

Obwód trójkąta

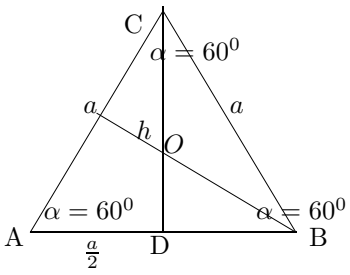
$$Ob_\Delta = a + b + c.$$

Rozróżniamy następujące trójkąty: trójkąty równoboczne, trójkąty równoramienne, trójkąty prostokątne i trójkąty dowolne.

17.6.4 Trójkąt równoboczny.

Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe $\alpha = 60^0$, w mierze łukowej $\alpha = \frac{\pi}{3}$ jak na rysunku

Konstrukcja trójkąta równobocznego. Rysujemy odcinek o ustalonej długości boków trójkąta. Stawiamy nóżkę cyrkla na początku odcinka i zakreślamy okrąg o promieniu równym długości odcinka. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla na drugim końcu odcinka i tym samym promieniem zakreślamy okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów z końcami odcinka. Widzimy, że w ten spoób powstał trójkąt o równych bokach i równych kątach.



Trojkat rownoboczny ΔABC

Wysokość h trójkąta $\Delta\ ABC$ jest dwusieczną kąta α i dzieli podstawę a na połowę w punkcie D. Podobnie wysokości trójkąta równobocznego spuszczone na pozostałe boki dzielą ich na połowy i przecinają się w jednym punkcie O. Punkt przecięcia wysokości O dzieli te wysokości w stosunku $1:3$. To znaczy, że zachodzi następująca proporcja

$$\frac{|DO|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \quad |DC| = h$$

Stąd mamy

$$|DO| = \frac{1}{3}h, \quad \text{i} \quad |OC| = \frac{2}{3}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość h trójkąts $\Delta\ ABC$

$$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

Wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Obliczamy pole trójkąta równobocznego

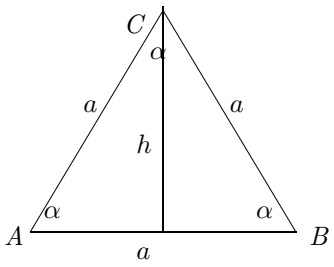
$$P = h * \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku a

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Zadanie 17.11 *Zmierz boki i kąty trójkąta* ΔABC *niżej na rysunku*



(*i*) *Oblicz pole i obwód trójkąt równoramiennego* ΔABC, *o boku* $a = 3cm$.
(*ii*) *Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla.*
(*iii*) *Zmierz kąty i oblicz sumę kątów tego trójkąta.*

17.6.5 Trójkąt równoramienny

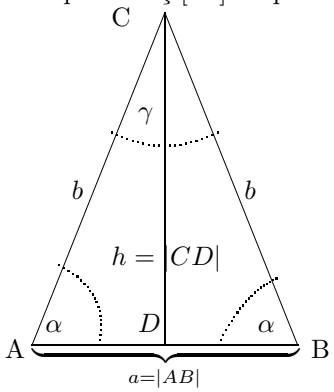
Trójkąt równoramienny o podstawie równej odcinkowi $[A, B]$ i równych ramionach $[A, C] = [B, C]$ ma przy podstawie $[A, B]$ kąty równe $\angle CAB = \angle ABC = \alpha$. Wysokość $h = |CD|$ dzieli podstawę $[A, B]$ na połowę.
Kąt przy wierzchołku C w mierze kątowej

$$\beta = 180^0 - 2 * \alpha$$

lub w mierze łukowej

$$\beta = \pi - 2 * \alpha$$

Wysokość $h = |CD|$ dzieli podstawę $[Ab]$ na połowę



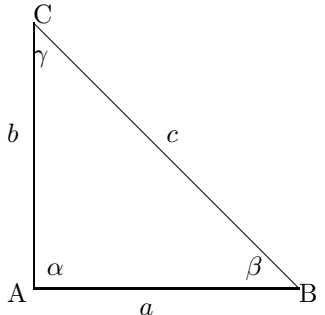
Pole trójkąta równoramiennego ΔABC obliczamy stosując wzór ogólny

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\underbrace{|AB| * |CD|}_{a*h} = \frac{1}{2}a * h.$$

Zadanie 17.12 *Zmierz boki i kąty trójkąta równoramiennego ΔABC. Oblicz obwód, pole i sumę kątów trójkąta równoramiennego, jeżeli długość jego podstawy $|AB| = 3cm$, a równe ramiona $|AC| = |BC| = 4cm$.*

17.6.6 Trójkąt prostokątny

W trójkącie prostokątnym wyróżniamy przyprostokątne AB i AC, o długości a i b, przeciwprostokątną BC, o długości c, kąt prosty $\alpha = 90^0$ i dwa kąty przyległe β, γ



Trójkąt prostokątny ΔABC

Pole trójkąta $= \frac{a * b}{2}$, obwód trójkąta $= a + b + c$

Zadanie 17.13 *Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy krótszych używając linijki i cyrkla. Oblicz sumę kątów tego trójkąta*

17.7 Cechy przystawania trójkątów

Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe. Jasne, że na to żeby dwa trójkąty były przystające wystarczy, żeby spełniona była jedna z trzech cech przystawania trójkątów.

Pierwsza checha przystawania trójkątów. *Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe.*
Druga cecha przystawania trójkątów. *Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają jeden bok równy i kąty przyległe do tego boku równe:*
Trzecia cecha przystawania trójkątów. *Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają dwa boki równe i kąt pomiędzy tymi bokami równy.*

17.8 Podobieństwo trójkątów

Dwa trójkąty ΔABC i $A^{'}B^{'}C^{'}$ są podobne, piszemy

$$\Delta ABC \simeq \Delta A^{'}B^{'}C^{'}$$

jeżeli mają odpowiednie boki proporcjonalne w skali proporcji k, to znaczy

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = k,$$
$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|,$$
$$|AC| = k * |A^{'}C^{'}|,$$
$$|BC| = k * |B^{'}C^{'}|.$$

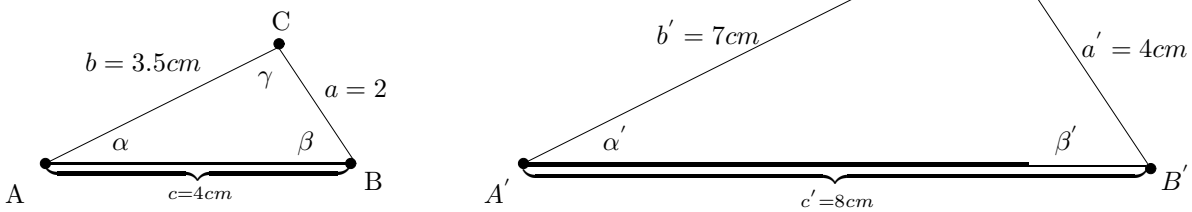
Rozpatrzmy trójkąt ΔABC o bokach

$$|AB| = c = 4cm, \quad |BC| = c = 2cm, \quad |AC| = b = 3.5cm$$

i trójkąt $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ o bokach

$$|A^{'}B^{'}| = c^{'} = 8cm, \quad |B^{'}C^{'}| = c^{'} = 4cm, \quad |A^{'}C^{'}| = b = 7cm$$

Zauważmy, że skala proporcji trójkątów ΔABC i $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ jest równa $k = 2$.



Niżej podamy trzy cechy podobieństwa trójkątów.

Pierwsza checha podobieństwa trójkątów. *Dwa trójkąty ΔABC i $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ są podobne, jeżeli mają wszystkie boki proporcjonalne w skali proporcji k, to znaczy*

$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|,$$
$$|AC| = k * |A^{'}C^{'}|,$$
$$|BC| = k * |B^{'}C^{'}|.$$

Zadanie 17.14 *Narysuj trójkąt ΔABC o bokach*

$$|AB| = c = 5cm, \qquad |AC| = b = 4cm, \qquad |BC| = a = 3cm$$

używając linijki i cyrkla.

Narysuj drugi trójkąt $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ o bokach dwa razy większych od boków trójkąta ΔABC.

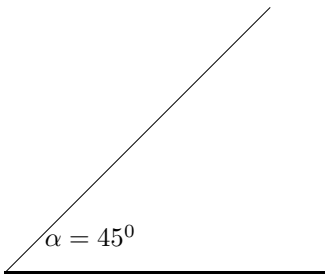
Druga cecha podobieństwa trójkątów.*Dwa trójkąty ΔABC i $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ są podobne, jeżeli mają dwa boki proporcjonalne w skali proporcji k i kąty pomiędzy tymi bokami równ, to znaczy $\alpha = \alpha^{'}$*

$$\frac{|AB|}{|A^{'}B^{'}|} = \frac{|AC|}{|A^{'}C^{'}|} = k,$$
$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|,$$
$$|AC| = k * |A^{'}C^{'}|,$$

Zadanie 17.15 *Narysuj trójkąt ΔABC o bokach*

$$|AB| = c = 3cm, \qquad |AC| = b = 5cm,$$

danym kącie $\alpha = 45^0$



używając linijki i cyrkla.

Narysuj drugi trójkąt $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ o bokach dwa razy większych od boków trójkąta ΔABC.

Trzecia cecha przystawania trójkątów. *Dwa trójkąty ΔABC i $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ są podobne, jeżeli mają boki AB i $A^{'}B^{'}$ proporcjonalne w skali k i kąty do nich przyległe równe, to znaczy $\alpha = \alpha^{'}$ i $\beta = \beta^{'}$ oraz boki AB i $A^{'}B^{'}$ w skali k*

$$\frac{|AB|}{|A^{'}B^{'}|} = k,$$
$$|AB| = k * |A^{'}B^{'}|.$$

Zadanie 17.16 *Narysuj trójkąt* ΔABC *o boku*

$$|AB| = c = 6cm,$$

i danych kątach przyległych $\angle\alpha = 30^0,\ \angle\beta = 60^0$ *do boku* AB.

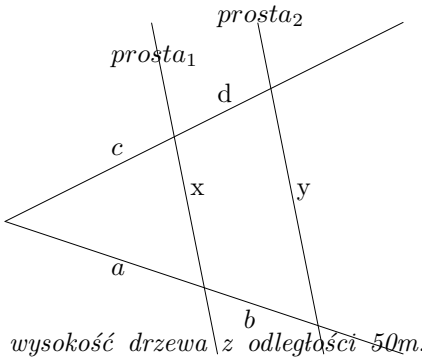
Narysuj drugi trójkąt $\Delta A^{'}B^{'}C^{'}$ *o bokach dwa razy większych od boków trójkąta* ΔABC.

17.8.1 Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta
Jeżeli $prosta_1$ jest równoległa do prostej $prosta_2$, piszemy $prosta_1 \parallel prosta_2$ to wtedy spełnione są proporcje

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$
$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{x}{y}$$

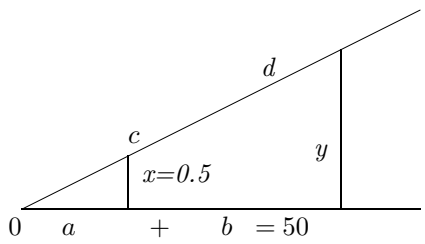
Interpretacja geometryczna powyższej proporcji podana jest niżej na rysunku



Przykład 17.3 *Oblicz wysokość drzewa z odległości 50m. Stosując twierdzenie Talesa obliczamy wysokość drzewa* y *z proporcji*

$$\frac{a}{a+b} = \frac{x}{y}, \quad y = \frac{(a+b)*x}{a}$$

Dane: $a + b = 50m$, *Dokonujemy pomiarów* $a = 2m,\ x = 0.5m$ *do proporcji, zobacz na rysunku.*



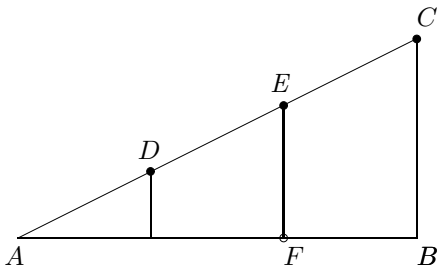
Podstawiając dane obliczamy wysokość drzewa $y = \frac{(a+b)*x}{a} = \frac{50*0.5}{2} = 12.5$

Twierdzenie Talesa stosujemy w zadaniach dzielenia odcinka w danej proporcji.

Przykład 17.4 *Podzielić odcinek AB w stosunku* $2:3$
Rozwiązanie. *Na ramieniu AC zaznaczamy dowolną rozwartością cyrkla trzy punkty D, E i punkt C. Następnie, łączymy punkt C z punktem B używając linijki. Rysujemy równoległe do odcinka BC przechodzące przez punkty D i E. W ten sposób dostajemy podział odcinka AB punktem F w stsunku* $2:3$*, Zatem, z twierdzenia Talesa mamy proporcje*

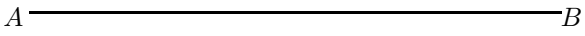
$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{2}{3}$$

Interpretacja geometryczna tej proporcji podana jest niżej na rysunku



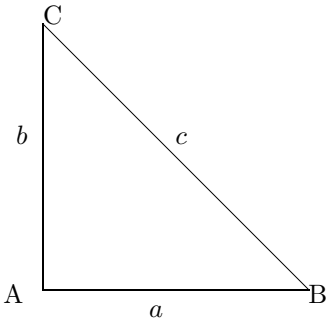
Zadanie 17.17 *Oblicz wysokość drzewa z odległości 150m, wiedząc, że wysokość listwy geodezyjnej równa jest 2m i jej odległość od punktu pomiaru 10m.*

Zadanie 17.18 *Podzielić odcinek AB w stosunku* $1:3$



17.8.2 Twierdzenie Pitagorasa

Figury płaskie, twierdzenie Pitagorasa, wielokąty foremne, okrąg: kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg, miara łukowa k ątów, konsrukcje figur płaskich, figury przestrzenne granastosłupy proste, walce, stożki, ostrosłupy, sfery i kule, obliczanie objętości i pola powierzchni.
Związki miarowe w trójkącie prostokątnym wynikają z twierdzenia Pitagorasa.



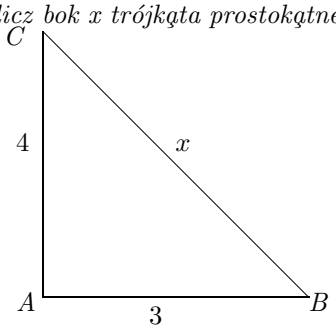
Trójkąt prostokątny ΔABC

Twierdzenie 17.3 *W trójkącie prostokątnym suma kwadratów przyprostokątnych równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej*

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{17.5}$$

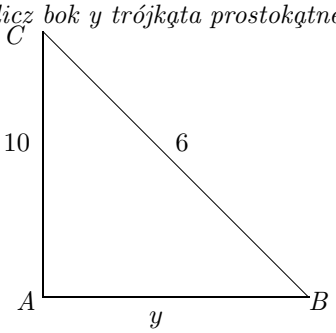
Tutaj przez a i b oznaczone są przyprostokątne, literą c oznaczona jest przeciwprostokątna

Przykład 17.5 *Oblicz bok x trójkąta prostokątnego*



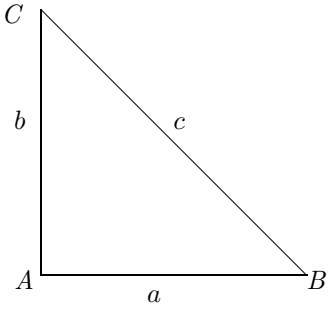
Trójkąt prostokątny ΔABC

Przykład 17.6 *Oblicz bok y trójkąta prostokątnego*



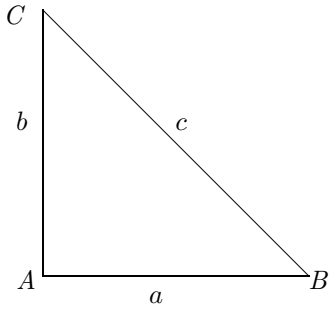
Trójkąt prostokątny ΔABC

Przykład 17.7 *Oblicz przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, wiedząc, że przyprostokątne* $a = 9,\ b = 12$



Trójkąt prostokątny ΔABC

Przykład 17.8 *Oblicz wszystkie boki trójkąta prostokątnego, wiedząc, że przyprostokątna $a = 12cm$, przyprostokątna b jest o $4cm$ dłuższa od przyprostokątnej a, natomiast przeciwprostokątna c jest dłuższa o $8cm$ od przyprostokątnej a.*



Trójkąt prostokątny ΔABC

17.8.3 Wzór Herona. Związek pomiędzy obwodem i polem trójkąta.

Obwód trójkąta ΔABC równy jest sumie długości jego boków

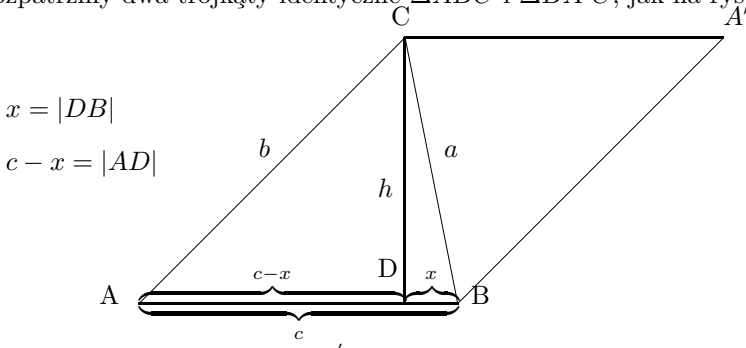
$$Ob = |AB| + |AC| + |CA| \quad lub \quad Ob = a + b + c$$

Pole trójkąta ΔABC obliczmy stosując wzór Herona. [10]
Wzór Herona.

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie połowa obwodu $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Dowód. Rozpatrzmy dwa trójkąty identyczne ΔABC i $\Delta BA^{'}C$, jak na rysunku



Zauważmy, że pole równoległoboku $ABA^{'}C$ równe jest

$$P_{ABA'C} = c * h$$

Wysokość $h = |DC|$ obliczamy z twierdzenienia Pitagorasa. Mianowiecie, z twierdzenia Pitagorasa wynikają następujące związki
Z trójkąta prostokątnego ΔADC mamy równość

$$h^2 = b^2 - (c-x)^2$$

[10] Wzór Herona stosujemy do trójkąta ΔABC o różnej długości boków

Podobnie z trójkąta prostokątnego $\Delta DA^{'}C$

$$h^2 = a^2 - x^2$$

Skąd obliczamy długość odcinka $x = |AD|$

$$b^2 - (c-x)^2 = a^2 - x^2$$

$$b^2 - c^2 + 2c * x - x^2 = a^2 - x^2$$

$$2c * x = a^2 - b^2 + c^2$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$

Teraz obliczamy kwadrat wysokości równoległoboku $ABA^{'}C$ stosując wzory uproszczonego mnożenia

$$\begin{aligned}
h^2 = a^2 - x^2 &= a^2 - (\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c})^2 \\
&= \frac{4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\
&= \frac{(2ac)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\
&= \frac{(2ac - a^2 + b^2 - c^2)(2ac + a^2 - b^2 + c^2)}{4c^2} \\
&= \frac{(b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2)}{4c^2} \\
&= \frac{(b - a + c)(b + a - c)((a + c - b)(a + c + b)}{4c^2} \\
&= \frac{(a + b + c - 2a)(a + b + c - 2c)((a + b + c - 2b)(a + c + b)}{4c^2} \\
&= \frac{2(p-a)2(p-c)2(p-b)2p}{4c^2}, \qquad p = \frac{a+b+c}{2} \\
&= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}, \qquad p = \frac{a+b+c}{2}
\end{aligned}$$

Pole trójkąta ΔABC o danej długości boków równe jest połowie pola równoległoboku $ABA^{'}C$. Zatem mamy wzór Herona na pole trójkąta ΔABC

$$\begin{aligned}
P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}c * h &= \frac{c}{2}\sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}} \\
&= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
\end{aligned}$$

Przykład 17.9 *Oblicz obwód i pole trójkąta ΔABC o długości boków*

$$a = |AB| = 3cm, \quad b = |CA| = 4cm, \qquad c = |AB| = 5cm$$

Rozwiązanie. Obwód trójkąta ΔABC równy jest sumie długości jego boków

$$Ob = a + b + c = 3cm + 4cm + 5cm = 12cm,$$

polowa obwodu

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3cm + 4cm + 5cm}{2} = 6cm,$$

Pole trójkąta ΔABC obliczamy stosując wzrór Herona

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{6cm(6cm-3cm)(6cm-4cm)(6cm-5cm)} \\ &= = \sqrt{6*3*2*1cm^4} = \sqrt{36cm^4} = 6cm^2. \end{aligned}$$

Zadanie 17.19 *Oblicz obwód i pole trójkąta ΔABC o długości boków*

$$a = |AB| = 6cm, \quad b = |CA| = 8cm, \qquad c = |AB| = 10cm$$

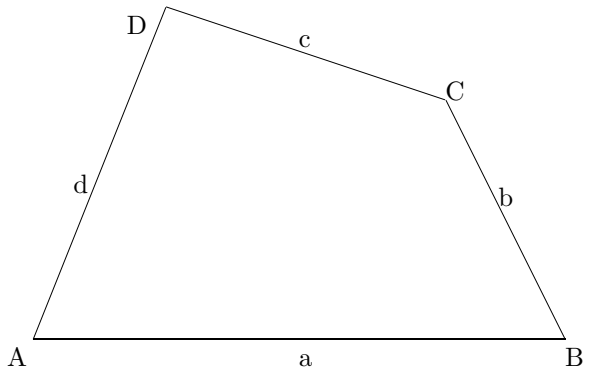
17.9 Czworokąty

Rozpatrzmy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A,\ B,\ C,\ D$ o czterech bokach długości $a,\ b,\ c,\ d$, i o kącie $\angle ABC$ o wierzchołku B, kątcie $\angle BCD$ o wierzchołku C, kątcie $\angle CDA$ o wierzchołku D.
Suma długości dowolnie wybranych trzech boków czworokąta jest nie mniejsza od długości boku czwartego, piszemy

$$|AB| + |BC| + |CD| \geq |AD|.$$

Suma kątów czworokąta równa jest 360^0, w mierze łukowej 2π, piszemy

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360^0$$



Zadanie 17.20 *Zmierz boki i kąty tego czworokąta. Oblicz obwód i sumę kątów czworokąta czworokąt $ABCD$.*

Rozpatrzymy następujące czworokąty

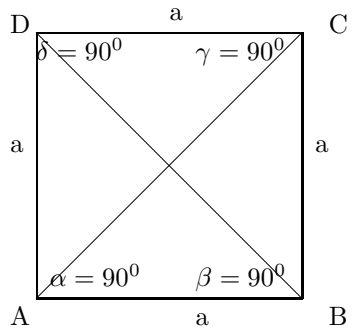
- kwadrat
- prostokąt
- trapez
- równoległobok
- romb
- deltoid

- czworokąt dowolny
- okrąg wpisany i okrąg opisany na czworokącie

[11]

17.9.1 Czworokąt foremny. Kwadrat.

Kwadrat $ABCD$ jest figurą foremną o czterych bokach równych a i o czterech kątach prostych równych 90^0 lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$.



Kwadrat ma dwie przekątne AC i BD, które przecinają się pod kątem prostym równym 90^0 lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$. Z twordzenia Pitagorasa obliczamy długość przekątnej

$$|AC|^2 = |BC|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \qquad |AC| = |BC| = a\sqrt{2}.$$

Promień okręgu wpisanego w kwadrat równy jestpołowie boku

$$r = \frac{a}{2}$$

Promień okręgu opisanego na kwadracie równy jest połowie przekątnej

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Pole kwadratu

$$P_{ABCD} = a * a^2, \qquad \textit{obwod kwadratu } Ob = 4 * a.$$

Zadanie 17.21 *Oblicz obwód Ob i pole P kwadratu, długość przekątnych, promień r okręgu wpisanego w kwadrat i promień R okręgu opisanego na kwadracie, jeżeli bok kwadratu ma długość* $a = 4.$.

17.9.2 Prostokąt.

Prostokąt $ABCD$ ma cztery boki parami równe

$$a = c,\ b = d,$$

[11] Konstrukcja kwadratu przy pomocy cyrkla i linijki opisana jest w projekcie *Figury podstawowe. Konstrukcja.*

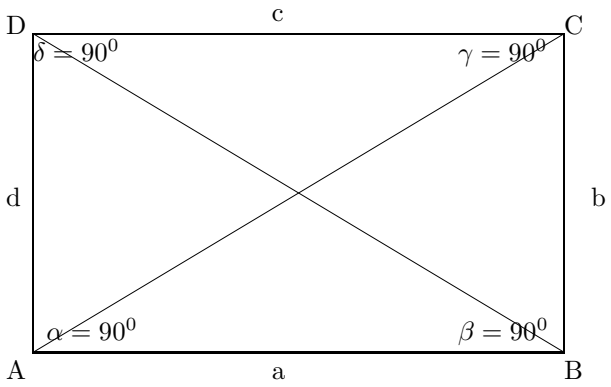
i cztery kąty proste równe 90^0
Z twierdzenia Pitagorasa obliczmy przekątne prostokąta

$$|AC| = |BD| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pole prostokąta

$$P_{ABCD} = a * b.$$

Obwód prostokąta Ob $= 2 * a + 2 * b$



Okrąg opisany na prostokącie ma promień R równy połowie przekątnych

$$R = \frac{1}{2}|AC| == \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Natomiast nie istnieje okrąg wpisany w prostokąt, z wyjątkiem kwadratu, który jest szczególnym prostokątem o bokach równych.

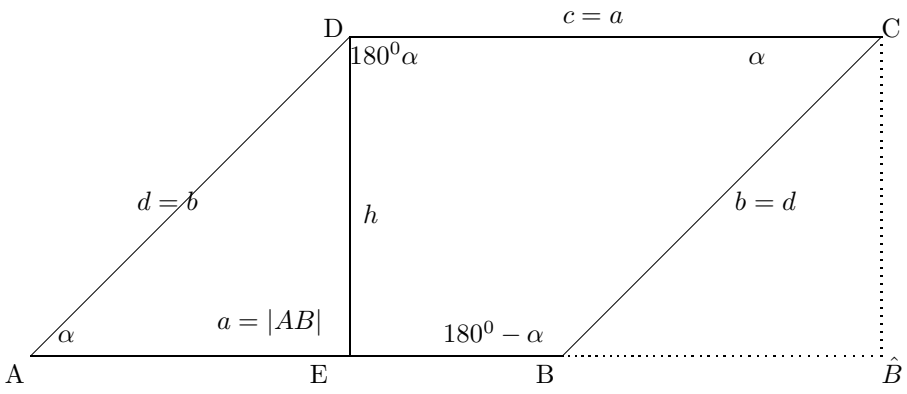
17.9.3 Równoległobok.

Równoległobok $ABCD$ ma cztery boki parami równe

$$a = c, \qquad b = d$$

i cztery kąty parami równe

$$\alpha = \angle DAB = \angle BCD, \qquad 180^0 - \alpha = \angle ABC = \angle CDA.$$



Wysokość równoległoboku oznavczamy literą h.
Pole równoległoboku

$$P_{ABCD} = a * h.$$

Istotnie, zauważmy, że pole równoległoboku $ABCD$ równe jest polu prostokąta $E\hat{B}CD$. To znaczy, że

$$P_{A\hat{B}CD} = P_{ABCD} = a * h.$$

i obwód równoległoboku

$$Ob = 2 * a + 2 * b.$$

17.9.4 Romb.

Romb $ABCD$ ma cztery boki równe

$$a = |AB| = BC| = |CD|$$

i cztery kąty parami równe

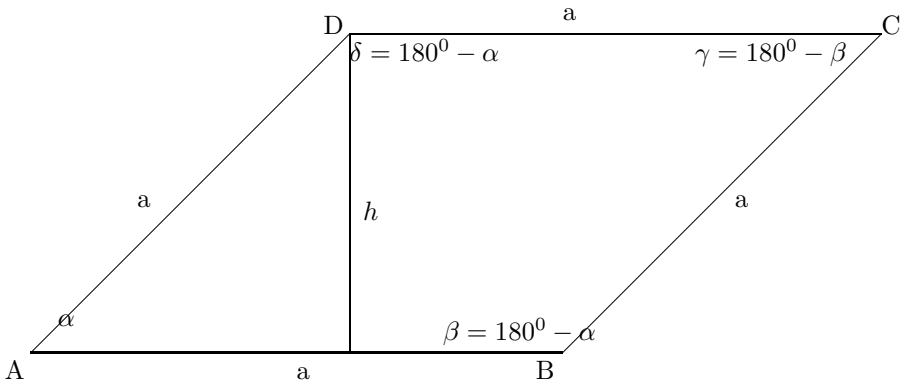
$$\alpha = \gamma, \qquad \beta = \delta.$$

Wysokość rombu oznaczamy literą h.
Zauważmy, że obwód rombu

$$Ob = 4 * a.$$

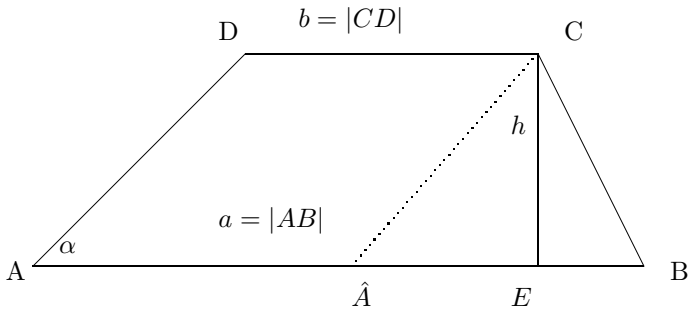
Pole rombu

$$P = a * h.$$



17.9.5 Trapez

Trapez $ABCD$



jest czworokątem o długości podstawy dolnej $a = |AB|$ równoległym do podstawy górnej o długości $b = |CD|$.

Pole trapezu

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b) * h.$$

Istotnie, zauważmy, że pole trapezu P_{ABCD} równe jest sumie pola równoległoboku

$$\hat{P}_{AECD} = (b * h$$

i pola trójkąta

$$P_{\hat{A}BC} = \frac{1}{2}(a-b) * h.$$

Zatem pole trapezu

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \hat{P}_{AECD} + P_{\hat{A}BC} \\ &= b * h + \frac{1}{2}(a-b) * h \\ &= \frac{1}{2}(a+b) * h \end{aligned}$$

Obwód trapezu

$$Ob = |AB| + |BC| + |CD| + |AC|.$$

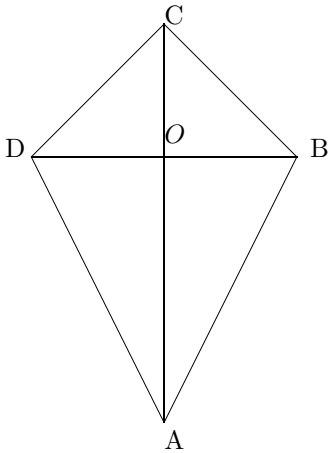
[12]

17.9.6 Deltoid.

Deltoid jest czworokątem o równych bokach parami

$$|AB| = |AD|, \qquad |CD| = |AD|$$

i o kątach $\angle ADC = \Delta ABC$
Deltoid ma dwie prostopadłe przekątne L_1 i L_2, jedna z nich jest symetralą drugiej, jak niżej na rysunku



$L_2 = |DB|$ przekątna pozioma

$L_1 = |AC|$ przekątna pionowa

Pole deltoidu równe jest połowie iloczyny przekątnych

$$P_{Deltoid} = \frac{1}{2}L_1 * L_2$$

[12]Twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie i wpisanym w czworokąt jest opisane w paragrafie o czworokątach Twierdzenie to dotyczy wszystkich czworokątów w tym trapezów

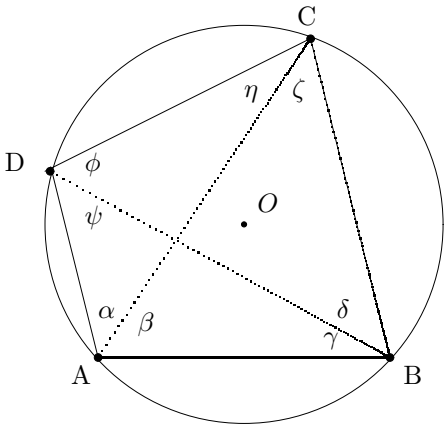
Istotnie, zauważamy, że pole deltoidu P_{ABCD} równe jest sumie pól trójkątów ΔABD i ΔBCD

$$\begin{aligned} P_{Deltoid} = P_{ABD} + P_{DBC} &= \tfrac{1}{2}L_2 * |AO| + \tfrac{1}{2}L_2 * |OC| \\ &= \tfrac{1}{2}\underbrace{(|AO| + |OC|)}_{L_1} \\ &= \tfrac{1}{2} * L_1 * L_2. \end{aligned}$$

[13]

17.9.7 Okrąg opisany na czworokącie.

Nie na kadym czworokącie można opisać okrąg i nie w każdy czworokąt można wpisać okrąg. Warunki istnienia okręgu opisanego na czworokącie i okręgu wpisanego w czworokąt podamy niżej. Mianowicie rozpatrzmy czworokąt $ABCD$ wpisany okręgu o promieniu R i środku w punkcie O.



$\zeta = \psi$ kąty $\angle BCA = \angle BDA$ oparte na łuku $\widehat{AB}$

$\eta = \gamma$ kąty $\angle BDA = \angle ACD$ oparte na łuku $\widehat{AD}$

$\delta = \alpha$ kąty $\angle ABD = \angle ACD$ oparte na łuku $\widehat{DC}$

$\beta = \phi$ kąty $\angle CAB = \angle CDB$ oparte na łuku $\widehat{BC}$

Jak wiemy, kąty środkowe oparte na tym samym łuku są równe.
Zatem zauważamy na rysunku, że

$$\begin{aligned} &\zeta = \psi \quad oparte \quad na \quad luku \quad \widehat{AB} \\ &\eta = \gamma \quad oparte \quad na \quad luku \quad \widehat{AD} \\ &\delta = \alpha \quad oparte \quad na \quad luku \quad \widehat{DC} \\ &\beta = \phi \quad oparte \quad na \quad luku \quad \widehat{BC} \end{aligned} \tag{17.6}$$

Warunek konieczny i wystarczający na to, żeby można było opisać okrąg na danym czworokącie o wierzchołkach A, B, C, D podamy w formie następującego twierdzenia

Twierdzenie 17.4 *Na czworokącie $ABCD$ o wierzchołach A, B, C, D można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma kątów naprzeciwległych jest równa*

$$\angle ABC + \angle CDA = \angle BCA + \angle DAB \tag{17.7}$$

[13] Twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie i wpisanym w czworokąt jest opisane w paragrafie o czworokątach Twierdzenie to dotyczy wszystkich czworokątów w tym deltoidu

[14] **Dowód.** Dowód twierdzenia wytnika z równości (17.6) kątów $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \zeta$, które tworzą przekątne z bokami czworokąta. Teraz sprawdzamy równość (17.7)

$$\begin{aligned}
\angle ABC + \angle CDA &= \underbrace{(\delta+\gamma)}_{\angle ABC} + \underbrace{(\phi+\psi)}_{\angle CDA} \\
&= (\alpha+\eta) + (\beta+\zeta) \\
&= \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\angle DAC} + \underbrace{(\eta+\zeta)}_{BCD} \\
&= \angle BCA + \angle DAB
\end{aligned}$$

Wzór na pole czworokąta opisanego na okręgu

$$P_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

gdzie długości boków

$$a = |AB|, \quad b = |BC|, \quad c = |CD|, \quad d = |DA|,$$

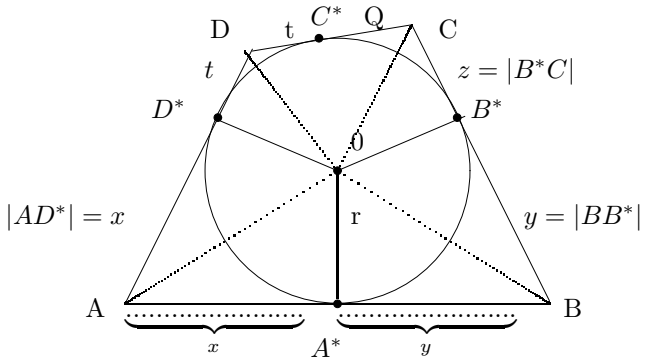
a litera p oznacza połowę obwodu czworokąta

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c+d) = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD + |AD|).$$

17.9.8 Okrąg wpisany w czworokąt

Opis okręgu wpisanego w czworokąt o wierzchołkach A, B, C, D zacznijmy od następujących obserwacji:
(**a**) Boki czworokąta są styczne do okręgu wpisanego w punktach styczności A^*, B^*, C^*, D^*
(**b**) Styczne do okręgu poprowadzone z wierzchołków czworokąta wyznaczają odcinki parami równej długości, piszemy

$$\begin{aligned}
x = |A, A^*| = |AD^*|, \qquad & y = |A^*B| = |BC^*| \\
z = |B^*C| = |CC^*|, \qquad & t = |C^*D| = |DD^*|
\end{aligned} \tag{17.8}$$



Warunek konieczny i wystarczający na to, żeby można było wpisać okrąg w danym czworokąt o wierzchołkach A, B, C, D podamy w formie następującego twierdzenia

[14]Tutaj $\angle ABC$ oznacza kąt o wierzchołku B i ramionach $[A, B]$ i $[A, D]$.

Twierdzenie 17.5 *W czworokąt $ABCD$ o wierzchołach A, B, C, D można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, jeżeli sumy długości boków naprzeciwległych są równa*

$$|AB| + |CD| = AD| + |BC| \tag{17.9}$$

Dowód. Dowód twierdzenia wynika z własności (a) i (b) stycznej do okręgu i z równości (17.8), parami równych boków naprzeciwległych. Mianowicie, sprawdzamy, że lewa strona równości (17.9)

$$\begin{aligned} |AB| + |CD| &= \underbrace{(x+y)}_{bok\ |AB|} + \underbrace{(z+t)}_{bok\ |CD|} \\ &= \underbrace{(x+t)}_{bok\ |AD|} + \underbrace{(y+z)}_{bok\ BC|} \\ &= |AD| + |BC|, \end{aligned}$$

równa jest prawej stronie równości (17.9).[15]

Pole czworokąta i promień okręgu wpisanego w czworokąt. Zauważmy, że promień r okręgu wpisanego w czworokąt jest równy z wysokościami trójkątów

$$\Delta AOB, \quad \Delta BCO, \quad \Delta DCO, \quad \Delta DAO$$

spuszconymi na boki

$$[A, B], \quad [B, C], \quad [C, D], \quad [D, A]$$

czworokąta $ABCD$.
Zatem pola tych trójkątów są równe odpowiednio

$$P_{\Delta ABO} = \tfrac{1}{2} r * |AB|$$

$$P_{\Delta BCO} = \tfrac{1}{2} r * |BC|$$

$$P_{\Delta CDO} = \tfrac{1}{2} r * |CD|$$

$$P_{\Delta DAO} = \tfrac{1}{2} r * |DA|$$

Pole czworokąta $ABCD$ równe jest sumie pól czterech trójkątów, piszemy

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{\Delta ABO} + P_{\Delta BCO} + P_{\Delta CDO} + P_{\Delta DAO} \\ &= \frac{1}{2} r * |AB| + \frac{1}{2} r * |BC| + \frac{1}{2} r * |CD| + \frac{1}{2} r * |DA| \\ &= \frac{1}{2} r (|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) \\ &= r * p \end{aligned}$$

gdzie litera p oznacza połowę obwodu czworokąta $ABCD$.

$$p = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|).$$

17.10 Zastosowanienie iloczynu wektorowego do obliczania pola czworokąta dowolnego.

Pole dowolnego czworokąta $ABCD$ o danych wierzchołkach A, B, C, D we współrzędnych kartezjańskich możemy obliczyć stosując iloczyn wektorowy w przestrzeni kartezjańskiej R^3 cf. (17.10)

[15] Tutaj korzystamy z lacznosci dodawania

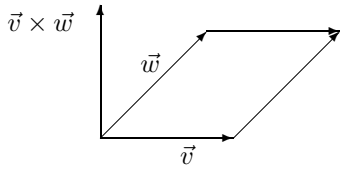
17.10.1 Iloczyn wektorowy w przestrzeni trójwymiarowej R^3

Naturalnie iloczyn wektorowy wykonalny jest w przestrzeni kartezjańskiej trójwymiarowej i opisany jest w rozdziale geometrii przestrzennej. W tym rozdziale, geometrii płaskiej, stosujemy iloczyn wektorowy do obliczania pola czorokąta dowolnego.
Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad i \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

w przestrzeni trójwymiarowej

$$R^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \ -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty \ \}$$



Wynikiem mnożenia wektorowego wektora $\vec{v}$ przez wektor $\vec{w}$ jest trzeci wector $\vec{v} \times \vec{w}$, którego wpółrzędne obliczamy z rozwinięcia Laplace'a macierzy utworzenej ze współrzędnych wektorów

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right\}$$

Mianowicie iloczyn

$$\vec{v} \times \vec{w} = [Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\}, -Det(\left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\}), Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\}]$$

gdzie wyznaczniki -determinants

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\} = v_2 * w_3 - v_3 * w_2,$$

$$-Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\} = -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1),$$

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\} = v_1 * w_2 - v_2 * w_1$$

Skąd otzymamy wzór na współrzędne iloczynu wektorowego

$$\vec{v} \times \vec{w} = [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]. \tag{17.10}$$

Wektor $\vec{v} \times \vec{w}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$, piszemy

$$\vec{v} \times \vec{v} \perp \vec{w}, \qquad \vec{w} \times \vec{v} \perp \vec{w}$$

Wiemy, że wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, jeżeli ich iloczy skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

równy jest zero.
Zatem, sprawdzamy iloczyn skalarny

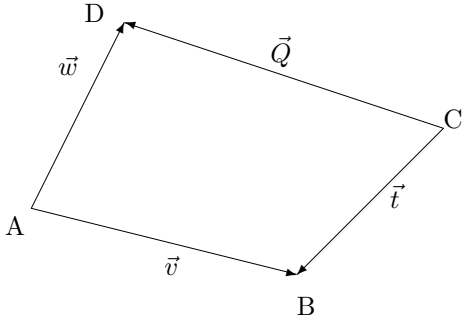
$$\begin{aligned}(\vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}) &= ([v_1, v_2, v_3], [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]) \\ &= v_1(v_2 * w_3 - v_3 * w_2) - v_2(v_1 * w_3 - v_3 * w_1) + v_3(v_1 * w_2 - v_2 * w_1) \\ &= (v_1 v_2 w_3 + v_2 v_3 w_1 + v_3 v_1 w_2) - (v_1 v_3 w_2 + v_2 v_1 w_3 + v_3 v_2 w_1) = 0\end{aligned}$$

Długość wektora $\vec{v} \times \vec{w}$ równa jest polu równoległoboku o bokach $\vec{v}$ i $\vec{w}$.
[16] Zatem długość wektora

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{|v_2 * w_3 - v_3 * w_2|^2 + |-(v_1 * w_3 - v_3 * w_1)|^2 + |v_1 * w_2 - v_2 * w_1|^2}$$

17.10.2 Pole czworokąta. Przykłady

Rozpatrzymy czworokąt $ABCD$



o wierzchołkach

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$
$$C = (c_1, c_2, c_3), \quad D = (d_1, d_2, d_3)$$

rozpięty na wektorach

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = \vec{AD},$$
$$\vec{Q} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [t_1, t_2, t_3] = \vec{CD},$$

gdzie współrzędne wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{Q}$, $\vec{t}$ określamy przez różnice współrzędnych wierzchołków A, B, C, D czworokąta $ABCD$

$$\begin{aligned}&v_1 = b_1 - a_1, \quad v_2 = b_2 - a_2, \quad v_3 = b_3 - a_3, \\ &w_1 = d_1 - a_1, \quad w_2 = d_2 - a_2, \quad w_3 = d_3 - a_3, \\ &z_1 = b_1 - c_1, \quad z_2 = b_2 - c_2, \quad z_3 = b_3 - c_3, \\ &t_1 = d_1 - c_1, \quad t_2 = d_2 - c_2, \quad t_3 = d_3 - c_3.\end{aligned}$$

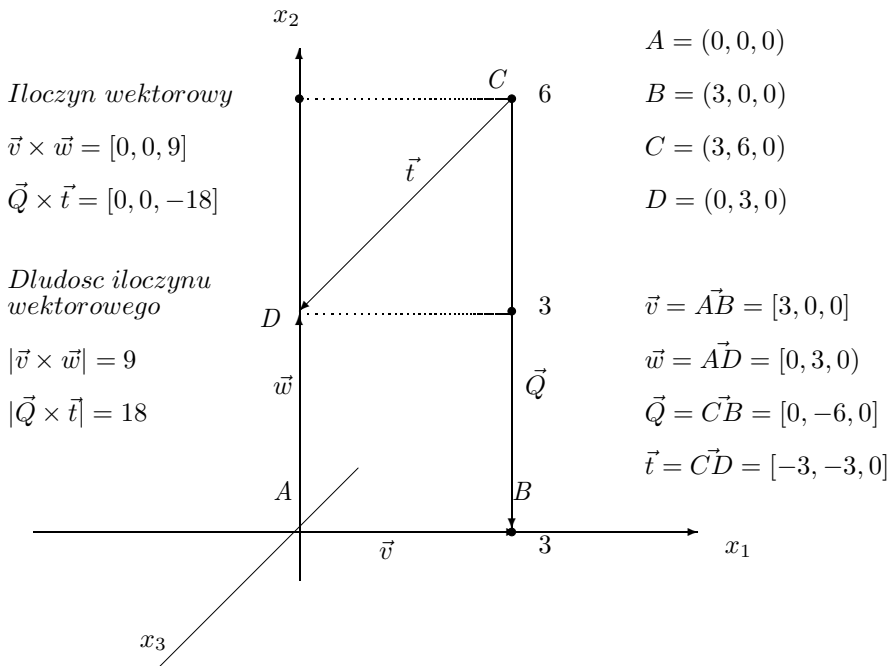
Stosując iloczyn wektorowy (cf. (17.10)) możemy obliczyć pole dowolnego czworokąta o danych współrzędnych jego wierzchołków. Mianowicie, pole czworokąta wypukłego $ABCD$ równe jest połowie sumy iloczynu wektorowego wektorów [17]

[16] Długość iloczynu wektorowego $|\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}| * |\vec{w}| * cos\alpha$, gdzie α oznacza kąt pomiędzy wektorami $\vec{v}, \vec{w}$. Pole czworokąta $P_{ABCD} = |\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}| * |\vec{w}| * cos\alpha$ równe jest długości iloczynu wektorowego.
[17] Pole czworokąta wklęsłego równe jest różnicy iloczynów wektorowych $P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} - \frac{1}{2}\vec{Q} \times \vec{t}$

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{Q} \times \vec{t} \tag{17.11}$$

Przykład 17.10 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [3,0,0] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [0,3,0] = \vec{AD},$$
$$\vec{Q} = [0,-6,0] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [-3,-3,0] = \vec{CD}$$



Iloczyn wektorowy

$\vec{v} \times \vec{w} = [0,0,9]$

$\vec{Q} \times \vec{t} = [0,0,-18]$

Dludosc iloczynu wektorowego

$|\vec{v} \times \vec{w}| = 9$

$|\vec{Q} \times \vec{t}| = 18$

$A = (0,0,0)$

$B = (3,0,0)$

$C = (3,6,0)$

$D = (0,3,0)$

$\vec{v} = \vec{AB} = [3,0,0]$

$\vec{w} = \vec{AD} = [0,3,0)$

$\vec{Q} = \vec{CB} = [0,-6,0]$

$\vec{t} = \vec{CD} = [-3,-3,0]$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{Q} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (17.10))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0*0-3*0, -(3*0-0*0), 3*3-0*0] \\ &= [0,0,9] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{Q} \times \vec{t} &= [-6*0-3*0, -(0*0-3*0), 0*3-6*3] \\ &= [0,0,-18] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v},\ \vec{w}$ i $\vec{Q},\ \vec{t}$.
Mianowicie

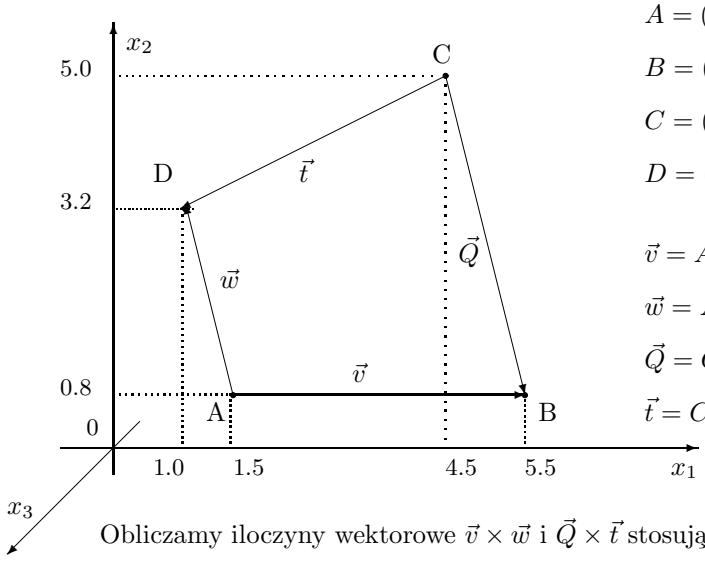
$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+9^2} + \frac{1}{2}|\sqrt{0^2+0^2+(-18)^2} \\ &= \frac{1}{2}*9 + \frac{1}{2}*18 \\ &= 4.5+9 = 13.5 \end{aligned}$$

[18]

Rozpatrzmy inny przykład obliczania pola czworokąta stosując iloczyn wektorowy.

Przykład 17.11 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [4.0, 0, 0] = \vec{AB},$$
$$\vec{w} = [-0.5, 2.4, 0] = \vec{AD},$$
$$\vec{Q} = [-1.0, 4.2, 0] = \vec{CB},$$
$$\vec{t} = [-3.5, -1.8, 0] = \vec{CD}$$



$A = (1.5, 0.8, 0)$

$B = (5.5, 0.8, 0)$

$C = (4.5, 5.0, 0)$

$D = (1.0, 3.1, 0)$

$\vec{v} = \vec{AB} = [4.0, 0, 0]$

$\vec{w} = \vec{AD} = [-0.5, 2.4, 0)$

$\vec{Q} = \vec{CB} = [-1.0, 4.2, 0]$

$\vec{t} = \vec{CD} = [-3.5, -1.8, 0]$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{Q} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (17.10))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 0 * 2.4, -(4 * 0 + 0.5 * 0), 4 * 2.4 + 0.5 * 0] \\ &= [0, 0, 9.6] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{Q} \times \vec{t} &= [4.2 * 0 + 1.8 * 0, -((-1) * 0 - (-3.5) * 0), 1 * 1.8 + 4.2 * 3.5] \\ &= [0, 0, 16.5] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v},\ \vec{w}$ i $\vec{Q},\ \vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9.6^2} + \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 16.5^2} \\ &= \frac{1}{2} * 9.6 + \frac{1}{2} * 16.5 \\ &= 4.8 + 8.25 = 13.05 \end{aligned}$$

[18] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

19

Zadanie 17.22 *Oblicz długości wektorów*

$$(i)\ \ \vec{v} = [3, 0, 4], \qquad \vec{w} = [8, -6, 0]$$

(ii) *Oblicz iloczyn wektorowy* $\vec{v} \times \vec{w}$ *wektorów*

$$\vec{v} = [3, 0, 4], \qquad \vec{w} = [8, -6, 0]$$

(iii) *Sprawdź, że wektory*

$$\vec{v} \perp \vec{w} \times \vec{w}$$

są prostopadłe.

Zadanie 17.23 *Sprawdź, że wektor*

$$\vec{w} = [w_1, w_2, 0]$$

jest prostopadły do wektora

$$\vec{v} \times \vec{w},$$

gdzie wektor

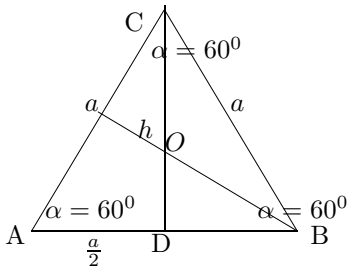
$$\vec{v} = [v_1, v_2, 0]$$

17.11 Figury płaskie foremne

Figurami foremnymi na płaszczyźnie nazywamy figury płaskie, które mają wszystkie boki i wszystkie kąty równe.

17.11.1 Trójkąt foremnym

Trójkąt równoboczny jest trójkątem foremnym
Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe $\alpha = 60^0$, w mierze łukowej $\alpha = \frac{\pi}{3}$ jak na rysunku



Trójkąt równoboczny ΔABC

Wysokość h trójkąta $\Delta\ ABC$ jest dwusieczną kąta α i dzieli podstawę a na połowę w punkcie D. Podobnie wysokości trójkąta równobocznego spuszcone na pozostałe boki dzielą podstawę na połowy i przecinają się w punkcie O, to jest w środku okręgu wpisanego w

[19] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

trójkąt równoboczny. Punkt przecięcia wysokości O dzieli te wysokości w stosunku $1:3$. To znaczy, że zachodzi następująca proporcja

$$\frac{|DO|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \quad |DC| = h$$

Stąd mamy

$$|DO| = \frac{1}{3}h, \quad \text{i} \quad |OC| = \frac{2}{3}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość h trójkąts $\Delta\, ABC$

$$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

Wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Obliczamy pole trójkąta równobocznego

$$P = h * \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

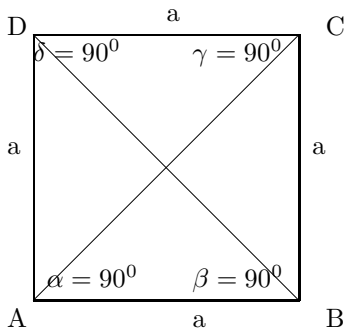
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku a

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

17.11.2 Czworokąt foremny

Kwadrat $ABCD$ jest figurą foremną o czterych bokach równych a i o czterech kątach prostych równych 90^0 lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$.



Kwadrat ma dwie przekątne AC i BD, które przecinają się pod kątem prostym równym 90^0 lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przekątnej

$$|AC|^2 = |BC|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, \qquad |AC| = |BC| = a\sqrt{2}.$$

Promień okręgu wpisanego w kwadrat równy jestpołowie boku

$$r = \frac{a}{2}$$

Promień okręgu opisanego na kwadracie równy jest połowie przekątnej

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Pole kwadratu

$$S = a * a^2, \qquad obwod\ kwadratu\ \ Ob = 4 * a.$$

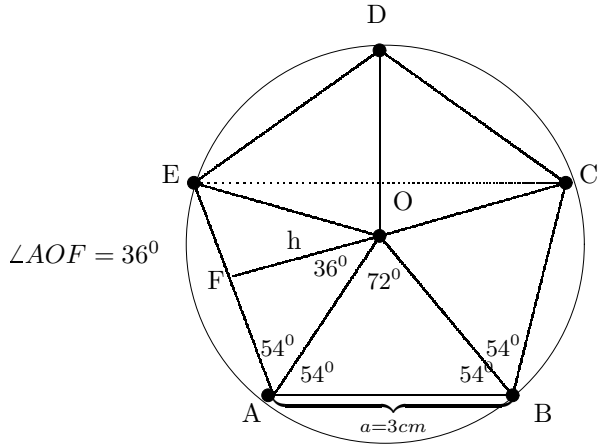
Zadanie 17.24 *Oblicz obwód, długość przekątnych i pole kwadratu o boku* $a = 4$

17.11.3 Pięciokąt foremny

Pięciokąt foremny o bokach równych a i kątach równych

$$\angle EAB = \alpha = 108^0$$

lub w mierze łukowej $\alpha = \frac{3\pi}{5}$ ma 5 równych przekątnych.



$\angle AOF = 36^0$

$$\angle EAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \alpha = 108^0$$

Pole pięciokąta foremnego. Pole pięciokąta foremnego składa się z $5 - ciu$ pól trójkątów równoramiennych i przystających o wysokości h i podstawie a.
Pola jednego z pięciu trójkątów ΔAOE

$$P_{\Delta AOE} = \frac{1}{2}a * h$$

gdzie wysokość

$$\begin{aligned} h = \tfrac{1}{2}a * ctg\ 36^0 &= \frac{a}{2} * \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{25-20}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{a}{2} * \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} \end{aligned}$$

Zatem pole pięciokąta foremnego o boku a obliczamy ze wzoru

$$P = 5 * P_{\Delta AOE} = 5 * \frac{1}{2} * a * h = \underbrace{\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10*\sqrt{5}}}_{Pole\ pieciokata\ foremnego}$$

Promień okręgu opisanego na pięciokącie foremnym. Promień $R = |AO|$ okręgu opisanego na pięciokącie foremnym, obliczymy z trójkcata prostokątnego ΔAOF stosując twierdzenie Pitagoroasa.
Mianowicie, kwadrat promienie R^2 równy jest sumie kwadratów przyprostokątnych $|FO|^2 + |FA|^2|$, pisamy

$$\begin{aligned} R^2 &= \underbrace{|FO|^2}_{h^2} + |FA|^2| \\ &= h^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ &= \underbrace{(\frac{a}{10} * \sqrt{25+10\sqrt{5}})^2}_{h^2} + (\frac{a}{2})^2 \\ &= \frac{a^2}{100}(25+10\sqrt{5}) + \frac{25a^2}{100} \\ &= \frac{a^2}{100}(50+10\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Skąd obliczmy promień okręgu opisanego na pięciokącie foremnym

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{a^2}{100}(50+10\sqrt{5})} \\ &= \underbrace{\frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}}_{R} \end{aligned}$$

Promień okręgu wpisanego w pięeciokąt foremny. Promień $r = |FO|$ okręgu wpisanego w pięciokąt foremny, obliczymy z trójkcata prostokątnego ΔAOF stosując twierdzenie Pitagoroasa.
Mianowicie, kwadrat promienie R^2 równy jest sumie kwadratów przyprostokątnych $|FO|^2 + |FA|^2|$, pisamy Zauważmy, że promień $r = |FO| = h$ okręgu wpisanego w pięciokąt foremny równy jest

$$r = \frac{a}{10} * \sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

Przekątne pięciokąta foremnego. Pięciokąt foremny ma 5 przekątnych równych o

długości

$$\begin{aligned} d = |EC| &= 2a * cos\frac{\pi}{5} \\ &= 2a * \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{a}{2}(1+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

17.11.4 Sześciokąt foremny

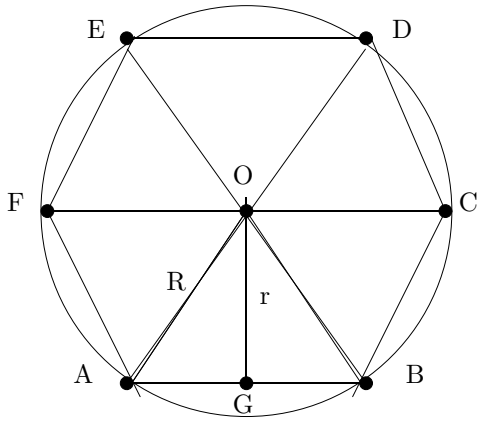
Sześciokąt foremny o sześciu bokach a równych

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FE| = a = R$$

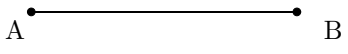
promieniowi R okręgu opisanego na sześciokącie i sześciu równych kątach

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = \angle EFC = \angle FAB = \alpha = 120^0.$$

w mierze łukowej $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.



Konstrukcja sześciokąta formnego przy pomocy cyrkla i linijki. Konstrukcja sześciokąta formnego przy pomocy cyrkla i linijki jest bardzo prosta, najbardziej prosta ze wszystkich konstrukcji figur foremnych.
Mianowicie, niech bedzie dany bok szściokąta jako odcinek $[A, B]$



Stawiamy cyrkiel w dowolniie wybranym punkcie O, środku okręgu i rozwartością cyrkla równą odcinkowi $[A, B]$ zakreślamy okrąg o promieniu $R = |AB| = a$ równym bokowi sześciokąta $ABCDEF$.
Następnie, stawiamy cyrkiel w dowolnym punkcie okręgu A i rozwartością cyrkla $R = a$ zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie B,dalej stawiamy cyrkiel w punkcie B i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie C, dalej stawiamy cyrkiel w punkcie C i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie D, dalej stawiamy cyrkiel w punkcie D i zakreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie E, ,dalej stawiamy cyrkiel w punkcie E i za-

kreślamy łuk przecinający okrąg w punkcie F.

Łączymy punkty A, B, C, D, E, F na okręgu przy pomocy linijki. W ten sposób narysowaliśmy sześciokąt foremny $ABCDEF$.

Zauważmy, że sześciokąt foremny składa się z $6-ciu$ trójkątów przystających i równobocznych obokach równych R i o wszystkich kątach równych $60^0 \sim \frac{\pi}{3}$.
Wszystkie z $6-ciu$ trójkątów

$$\Delta ABO,\ \Delta BCO,\ \Delta CDO,\ \Delta DEO,\ \Delta EFO,$$

mają wysokości równe $h = r = |OG|$ promieniowi okręgu wpisanego w sześciokąt.
Wysokość h obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ΔAGO.
Mianowicie

$$h^2 = R^2 - (\frac{R}{2})^2 = \frac{3R^2}{4}, \qquad h = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Pole sześciokąta foremnego składa się z 6-ciu pól trójkątów równobocznych o bokach równych $a = R = |AO|$.
Pole jednego trójkąta równobocznego równe jest

$$P_\Delta = \frac{1}{2}a * h = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Zatem, pole sześciokąta równe jest

$$P = 6 * P_\Delta = 6 * \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \underbrace{\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}}_{pole\ P\ szesciokata}.$$

Obwód sześciokąta foremnego równy jest

$$Ob = 6 * a \qquad lub \qquad Ob = 6 * R, \ \ bo \quad a = R.$$

17.11.5 Ośmiokąt foremny

Ośmiokąt foremny o ośmiu bokach równych

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FE| = |FG| = a$$

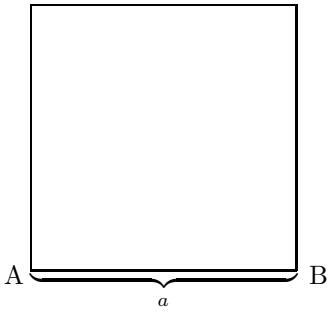
i o ośmiu równych kątach równych

$$\begin{aligned} \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE &= \angle DEF \\ &= \angle EFG = \angle FGH \\ &= \angle GHA = \angle HAB \\ &= \alpha = 135^0 \end{aligned}$$

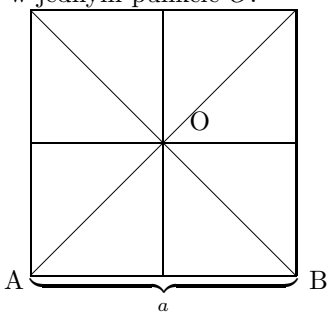
w mierze łukowej $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

17.11.6 Konstrukcja ośmiokąta foremnego.

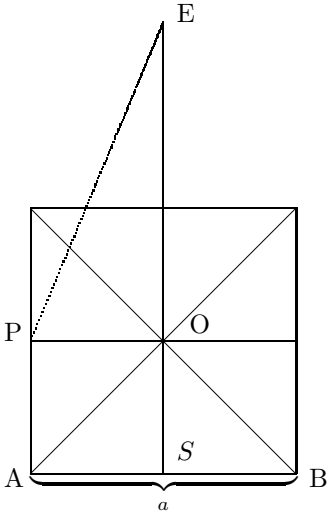
Konstrukcja ośmiokąta formnego o danym boku wykonamy przy pomocy cyrkla i linijki.
1. Konstruujemy kwadrat o danym boku $a = |AB|$ przy pomocy cyrkla i linijki. [20]



2. Rysujemy przekątne i symetralne boków kwadratu. Przekątne i symetralne boków kwadratu przecinają się w jednym punkcie O.



3. Na przdłużeniu symetralnej podstawy kwadratu odkładamy rozwartością cyrkla równą połowie przekątnej, to jest odcinek $|AO|$, stawiając cyrkel w punkcie O przecięcia przekątnych. Literą E oznaczamy wierzchołek ośmiokąta.



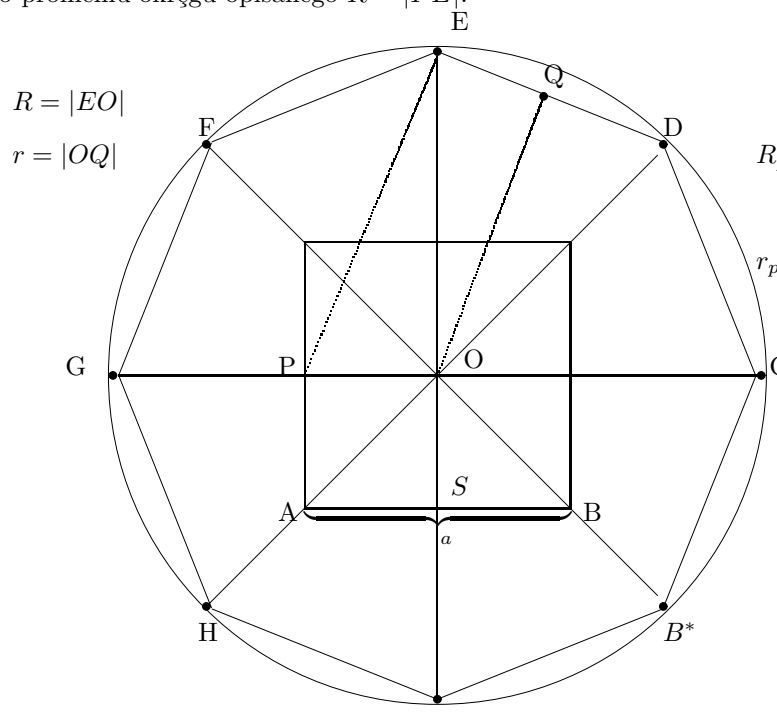
4. Rozwartością cyrkla równą promieniowi $R = |PE|$ rysujemy okrąg stawiając cyrkiel w punkcie O. Następnie przedłużamy przekątne kwadratu i środkowe boków do punktów przecięcia $A^*, B^*, C, D, E, F, G, H$ z okręgiem, to jest do wierzchołków ośmiokąta formnego A^*B^*CDEFH o danym boku $a = |AB|$.

[20] Konstukcje elementarne opisane w oprzednich paragrafach

Łączymy wierzhołki $A^*, B^*, C, D, E, F, G, H$ ośmiokąta przy pomocy linijki. W ten spoób skonstruowaliśmy ośmiokąt foremny

$$A^*B^*CDEFGH$$

o promeniu okręgu opisanego $R = |PE|$.



$R = |EO|$

$r = |OQ|$

$$R_{promien_R} = \underbrace{a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}}_{prom.okr.\ opisan.}$$

$$r_{promien_r} = \underbrace{\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})}_{prom.\ okr.wpisan.}$$

$$P_{pole} = \underbrace{2a^2(1+\sqrt{2})}_{pole\ osmiok.}$$

Z konstrukcji ośmiokąta foremnego wynika, że promień $R = |EO|$ okręgu opisanego na ośmiokącie równy jest przeciwprostokątnej $R = |EO|$ trójkąta prostokątnego ΔQEO.

$$\angle OEP = 22.5^0 \sim \frac{\pi}{8}, \qquad \angle EPO = 67.5^0 \sim \frac{3\pi}{8}.$$

Pole ośmiokąta foremnego. Zauważmy, że øśmiokąt foremny składa się z $8 - miu$ trójkątów przystających i równoramiennych o równych rammionach promieniowi R okręgu opisanego na ośmiokącie i o wszystkich kątach równych $135^0 \sim \frac{3\pi}{4}$.
Wszystkie z $8 - miu$ trójkątów

$$\Delta A^*B^*O,\ \Delta B^*CO,\ \Delta CDO,\ \Delta DEO,$$

$$\Delta EFO,\ \Delta FGO,\ \Delta GHO,\ \Delta HA^*O$$

mają wysokości równe $h = r = |OQ|$ promieniowi $r = h$ okręgu wpisanego w ośmiokąt.
Stosując twierdzenia Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ΔOQE obliczamy kwadrat wysokości

$$\begin{aligned} h^2 = |OE|^2 - |QE|^2 &= \underbrace{(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{2})^2 + (\frac{a}{2})^2}_{R^2} - (\frac{a}{2})^2 \\ &= \frac{a^2}{4}(1+\sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Skąd obliczamy wysokości i promień okręgo wpisanego w ośmiokąt

$$h = r = \frac{a}{2}(1+\sqrt{2})$$

Promień R okręgu opisanego na ośmiokącie. Promień okręgu opisanego na ośmiokącie wynika z konstrukcji ośmiokąta foremnego. Jego wartość obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąt prostokątnego ΔOQE. Mianowicie kwadrat przeciwprostokątnej $R = |EO|$ równy jest

$$\begin{aligned} R^2 = |EO|^2 &= |QO|^2 + |ES|^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ &= (\frac{a}{2}(1+\sqrt{2}))^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ &= \frac{a^2}{4}(3+2\sqrt{2}) + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{2}\sqrt{2} \\ &= a^2(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Skąd obliczamy promień okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym

$$R = a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

Pole ośmiokąta foremnego. Pole ośmiokąta foremnego składa się z $8-miu$ pól trójkątów równoramiennych o podstawie długości a i bokach długości R.
Pole jednego trójkąta równoramiennego równe jest

$$P_\Delta = \frac{1}{2}a * h = \frac{a^2}{4}(1+\sqrt{2})$$

Zatem, pole ośmiokąta równe jest

$$P = 8 * P_\Delta = 8 * \frac{a^2}{4}(1+\sqrt{2}) = \underbrace{2a^2(1+\sqrt{2})}_{pole\ P\ osmiokata} .$$

Obwód ośmiokąta foremnego równy jest $Ob = 8 * a$.

Promień r okręgu wpisanego w ośmiokąt i promień R okręgu opisanego na śmiokącie foremnym o danym boku, obliczymy również stosując związki trygonometryczne w trójkącie prostokątnym ΔOQE. Mianowicie, promień okręgu wpisanego w ośmiokąt

$$r = \frac{1}{2}a * ctg\frac{\pi}{8}$$

Wartość funkcji $ctg\frac{\pi}{8}$ obliczamy stosując tożsamość trygonometryczną

$$ctg\alpha - \frac{1}{ctg\alpha} = ctg2\alpha$$

dla $\alpha = \frac{\pi}{8}$

$$\begin{aligned} ctg\tfrac{\pi}{8} - tg\tfrac{\pi}{8} &= \frac{cos\frac{\pi}{8}}{sin\frac{\pi}{8}} - \frac{sin\frac{\pi}{8}}{cos\frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{cos^2\frac{\pi}{8} - sin\frac{\pi}{8}}{sin\frac{\pi}{8} * cos\frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{2 * cos\frac{\pi}{4}}{sin\frac{\pi}{4}} = 2ctg\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Skąd mamy równość

$$ctg\frac{\pi}{8} - \frac{1}{tg\frac{\pi}{8}} = ctg\frac{\pi}{8} \qquad lub \qquad ctg^2\frac{\pi}{8} - 2ctg\frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

Dla $z = ctg\frac{\pi}{8}$ znajdujemy wartość z rozwiązując równanie kwadratowe

$$z^2 - 2z - 1 = 0, \quad wyroznik \ \ \Delta = 8, \quad wartosc \ \ z = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Zatem $ctg\frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ i promień okręgu wpisanego w ośmiokąt foremny

$$r = \frac{1}{2}a * ctg\frac{\pi}{8} = \underbrace{\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})}_{r}$$

Zadanie 17.25 *Oblicz obwód i pole ośmiokąta foremnego $ABCDCEFG$ o długości boku $|AB| = 2$*

Zadanie 17.26 *Mając promień $r = 8$ ośmiokąta foremnego, oblicz promień R okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.*

Zadanie 17.27 *Mając dany bok $a = 3cm$ oblicz promień r okręgu wpisanego i promień R okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.*

Zadanie 17.28 *Skonstruuj ośmiokąt fororemny o boku $a = 3cm$ przy pomocy cyrkla i linijki. Zmierz promień r okręgu wpisanego w ośmiokąt i promień R kręgu opisanego na ośmiokącie foremnym.*

Zadanie 17.29 (i) *Oblicz obwód i pole tr.ojkąta ΔABC o długości boków*

$$|AB| = 10, \quad |BC| = 8, \quad |AC| = 6$$

(ii) *Sprawdź czy trójkąt ΔABC jest prostokątny.*

Zadanie 17.30 *Oblicz obwód i pole trójkąta ΔABC o długości boków*

$$|AB| = 3, \quad |BC| = 5, \quad |AC| = 7$$

stosując wzór Herona

Zadanie 17.31 *Oblicz obwód i pole równoległoboku $ABCD$ o długości boków*

$$|AB| = |CD| = 4, \quad |BC| = |AD| = 5,$$

stosując wzór Herona

Zadanie 17.32 *Oblicz obwód i pole sześciokąta foremnego $ABCDCE$ o długości boku $|AB| = 5$*

Chapter 18

Geometria w przestrzeni. Stereometria

18.1 Wstęp.

W tym rozdziale zajmiemy się następującymi tematami:

1. Kartezjański układ współrzędnych.

   Punkty i wektory w przestrzeni.

2. Parametryczne równanie prostej

3. Graniastosłupy i prostopadłościany,
   objętość i pole powierzchni

4. Ostrosłupy, objętość i pole powierzchni

5. Bryły obrotowe: walec, kula, stożek,
   objętość i pole powierzchni.

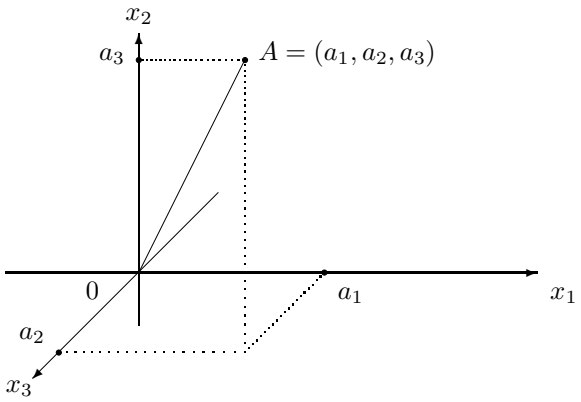
Wśród brył w przestrzeni, wyróżniamy bryły foremne i bryły platońskie. Bryły formne mają wszystkie ściany przystające. Bryły platońskie, do których należą czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan, uważane były w czasach starożytnych w Akademi Platona (427-347, B.C.) za figury idealne.

18.2 Punkty i wektory w przestrzeni kartezjańskiej

Położenie punktów i wektorów w przestrzeni określamy we współrzędnych kartezjańskich.

Podobnie jak na płaszczyźnie położenie figur geometrycznych w przestrzeni określamy we

współrzędnych kartezjańskich.



Na osiach liczbowych o kierunku i zwrocie osi $x_1,\ x_2,\ x_3$ odkładamy współrzędne punktów w przestrzeni kartezjańskiej

$$R^3 = \{(x_1, x_2, x_2) :\ -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty.\}$$

Punkt $A = (a_1, a_2, a_3)$ w układzie współrzędnych kartezjańskich x_1, x_2, x_3 ma współrzędne

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3.$$

Na punktach

$$A = (a_1, a_2, a_3) \quad i \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$

wykonujemy następujące operacje:

- Dodawanie punktów

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3). \end{aligned}$$

  Zatem suma punktów

$$A + B = C$$

  jest równa punktowi $C = (c_1, c_2, c_3)$ o współrzędnych

$$c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3.$$

- Odejmowanie punktów

$$\begin{aligned} A - B &= (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3). \end{aligned}$$

  Zatem różnica punktów

$$A - B = C$$

  jest równa punktowi $C = (c_1, c_2, c_3)$ o współrzędnych

$$c_1 = a_1 - b_1, \quad c_2 = a_2 - b_2, \quad c_3 = a_3 - b_3.$$

- Mnożenie punktu przez liczbę t

$$t * A = t * (a_1, a_2, a_3) = (t * a_1, t * a_2, t * a_3).$$

Zatem iloczyn punktu przez liczbę t jest równy punktowi

$$C = (c_1, c_2, c_3)$$

o współrzędnych

$$c_1 = t * a_1,\ c_2 = t * a_2,\ c_3 = t * a_3.$$

Przykład 18.1 *Niech dane będą punkty* $A = (2, -3, 4)$ *i* $B = (2, -1, 3)$.
Oblicz

$$(i)\quad A + B, \quad (ii)\quad a - b, \quad (iii)\quad 2 * A + 3 * B.$$

Rozwiązanie. Obliczamy

$$\begin{aligned}
(i)\ A + B &= (2, -3, 4) + (2, -1, 3) \\
&= (2 + 2, -3 - 1, 4 + 3) \\
&= (4, -4, 7).
\end{aligned}$$

$$Odpowiedz:\ A + B = C, \quad C = (4, -4, 7).$$

$$\begin{aligned}
(ii)\ A - B &= (2, -3, 4) - (2, -1, 3) \\
&= (2 - 2, -3 - (-1), 4 - 3) \\
&= (0, -2, 1)
\end{aligned}$$

$$Odpowiedz:\ A - B = C, \quad C = (0, -2, 1).$$

$$\begin{aligned}
(iii)\ 2 * A + 3 * B &= 2 * (2, -3, 4) + 3 * (2, -1, 3) \\
&= (2 * 2 + 3 * 2, 2 * (-3) + 3 * (-1), 2 * 4 + 3 * 3) \\
&= (10, -9, 17).
\end{aligned}$$

Odpowiedź: $2 * A + 3 * B = C, \quad C = (10, -9, 17)$.

Zadanie 18.1 *Niech dane będą punkty*

$$A = (3, 2, -1), \qquad B = (1, -1, 2).$$

Oblicz

$$(i)\quad A + B, \quad (ii)\quad A - B, \quad (iii)\quad 3 * A + 5 * B.$$

18.2.1 Wektory w przestrzeni

Niech dane będą punkty

$$A = (a_1, a_2, a_3), \qquad B = (b_1, b_2, b_3).$$

Wektor $\vec{AB}$ o paczątku w punkcie

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

i końcu w punkcie

$$B = (b_1, b_2, b_3)$$

określamy jako różnica punktów

$$\vec{AB} = B - A = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3].$$

[1] [2] Na przykład wektor związany o początku w punkcie $A = (0, 1, 3)$ i końcu w punkcie $B = (2, 0, 5)$ ma współrzędne

$$\vec{AB} = B - A = (2, 0, 5) - (0, 1, 3) = [2, -1, 2].$$

Dodawanie wektorów
Suma dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

równa jest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2, z_3] = [v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3]$$

o współrzędnych

$$z_1 = v_1 + w_1, \quad z_2 = v_2 + w_2, \quad z_3 = v_3 + w_3.$$

Przykład 18.2 *Oblicz sumę wektorów*

$$\vec{v} = [1, 2, 1] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1, 2]$$

Rozwiązanie. Suma

$$\vec{v} + \vec{w} = [1, 2, 1] + (2, 1, 2) = [1 + 2, 2 + 1, 1 + 2] = [3, 3, 3]$$

Odpowiedź: Sumą danych punktów $\vec{v} = [1, 2, 1]$ i $\vec{w} = [2, 1, 2]$ jest wektor $\vec{Q} = [3, 3, 3]$.

Odejmowanie wektorów
Różnica dwóch wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

równa jest wektorowi

$$\vec{Q} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{v} - \vec{w} = [v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3]$$

o współrzędnych

$$z_1 = v_1 - w_1 \quad i \quad z_2 = v_2 - w_2, \quad z_3 = v_3 - w_3.$$

Przykład 18.3 *Oblicz różnię wektorów*

$$\vec{v} = [1, 2, 6] \quad i \quad \vec{w} = [2, 1, 5]$$

Rozwiązanie. Obliczamy różnicę wektorów

$$\vec{v} - \vec{w} = [1, 2, 6] - [2, 1, 5] = [1 - 2, 2 - 1, 6 - 5] = [-1, 1, 1]$$

Odpowiedź: Wynikiem odejmowania danych wektorów $\vec{v} = [1, 2, 6]$ i $\vec{w} = [2, 1, 5]$ jest wektor $\vec{Q} = [-1, 1, 1]$.

[1] współrzędne v_1, v_2, v_3 wektora swobodnego $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ piszemy w nawiasach kwadrwtowych.
[2] Wektor swobodny określony jest przez jego długość, kierunek i zwrot, nie zależy od położenia na płaszczyźnie lub w przestrzeni.

18.2.2 Iloczyn skalarny wektorów

[3] Iloczyn skalarny wektorów jest ważną operacją na wektorach stosowaną w matematyce stosowanej, w fizyce, chemii i w innych przedmiotach ścisłych.

Defimnicja 18.1 *Iloczynem skalarnym wektorów* $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ *i* $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ *nazywamy liczbę*

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * w_3$$

Zatem, iloczyn skalarny wektorów nie jest wektorem, natomiast jest liczbą

Przykład 18.4 *Oblicz iloczyn skalarny wektorów*

$$\vec{v} = [2, 5, 3] \quad i \quad \vec{w} = [7, 3, -2]. \tag{18.1}$$

Rozwiązanie. Stosując wzór (18.1) obliczamy iloczyn skalarny danych wektorów, piszemy

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w}) &= ([2, 5, 3] * [7, 3, -2]) \\ &= 2 * 7 + 5 * 3 + 3 * (-2) = 14 + 15 - 6 = 23. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Iloczyn skalarny danych wektorów $\vec{v} = [2, 5, 3]$ i $\vec{w} = [7, 3, -2]$ jest liczbą 23, piszemy

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 23.$$

Iloczyn skalarny wektorów zachowuje wszystkie własności operacji arytmetycznej mnożenia. Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

- iloczn skalarny jest przemienny

  $$(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{v})$$

  Istotnie, sprawdzamy,że

  $$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w}) &= v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * w_3 \\ &= w_1 * v_1 + w_2 * v_2 + w_3 * v_3 \\ &= (\vec{w}, \vec{v}) \end{aligned}$$

- mnożenie skalarne wektorów jest rozdzielne względem dodawania

  $$(\vec{v}, (\vec{w} + \vec{Q})) = (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{Q})$$

  Istotnie sprawdzamy, że

  $$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w} + \vec{Q}) &= v_1 * (w_1 + z_1) + v_2 * (w_2 + z_2) + v_3(w_3 + z_3) \\ &= v_1 * w_1 + v_1 * z_1 + v_2 * w + 2 + v_2 * z_2 + v_3 * w_3 + v_3 * z_3 \\ &= \underbrace{v_1 * w_1 + v_2 * w_2 + v_3 * z_3}_{(\vec{v}, \vec{w})} + \underbrace{v_1 * z_1 + v_2 * z_2 + v_3 * z_3}_{(\vec{v}, \vec{Q})} \\ &= (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{Q}) \end{aligned}$$

[3] Wielokość skalarna to znaczy, że wielkość określona liczbą

- Iloczyn skalarny wektora $\vec{v}$ przez siebie równy jest kwadratowi jego długości

$$\begin{aligned}(\vec{v},\vec{v}) &= v_1 * v_1 + v_2 * v_2 + v_3 * v_3 \\ &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = |\vec{v}|^2.\end{aligned}$$

Teraz podamy ważne twierdzenie w postaci warunku dostatecznego i koniecznego

Twierdzenie 18.1 .
Warunek dostateczny: Jeżeli iloczyn skalarny jest równy zero

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest równy zero to wektory $\vec{v}$, $\vec{w}$ są prostopadłe, piszemy

$$\vec{v}\perp\vec{w}$$

Warunek konieczny: Jeżeli wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe

$$\vec{v}\perp\vec{w}$$

to ich iloczyn sklarny jest równy zero

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0.$$

Razem warunek konieczny i dostateczny piszmy w symbolach

$$\vec{v}\perp\vec{w} \Longleftrightarrow (\vec{v},\vec{w}) = 0.$$

Istnieje kilka dowodów tego twierdzenia. Tutaj podamy dowód oparty na twierdzeniu Pitagorasa. Mianowicie, udowodnimy, że trójkąt o ramionach $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

Dowód warunku dostatecznego. Zakładamy, że iloczyn skalarny wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest równy zero

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

Udowodnimy, że wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe.
Obliczamy kwadrat długości różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$

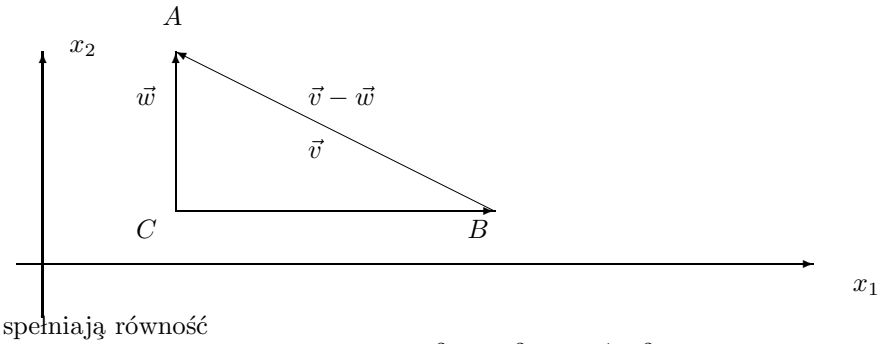
$$\begin{aligned}|\vec{v}-\vec{w}|^2 &= (\vec{v}-\vec{w},\vec{v}-\vec{w}) \\ &= (\vec{v},\vec{v}) - 2(\vec{v},\vec{w}) + (\vec{w},\vec{w}) \\ &= |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v},\vec{w}) + |\vec{w}|^2\end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli iloczyn skalarny

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0$$

to boki trójkąta ΔABC

$$|AB| = |\vec{v}|, \quad |AC| = |\vec{w}|, \quad |BC| = |\vec{v}-\vec{w}|$$



spełniają równość

$$|\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 = |v \vec{-} w|^2 \tag{18.2}$$

Z drugiej strony z twierdzenia Pitagorasa wynika, że suma kwadratów dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości boku trzeciego (cf. (17.5),**??**) wtedy i tylko wtedy, jeżeli ten trójkąt jest prostokątny.
Zatem kąt $\angle ACB$ pomiędzy wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest prosty, jeżeli iloczyn skalarny tych wektorów równy jest zero. Koniec dowodu warunku dostatecznego.
Dowód warunku koniecznego. Zauważmy, że wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe.

$$\vec{v} \perp \vec{w}.$$

Udowodnimy, że iloczyn skalarny $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$. W tym celu obliczmy poraz drugi kwadrat dłudości różnicy wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

$$\begin{aligned} |\vec{v}-\vec{w}|^2 &= (\vec{v}-\vec{w}, \vec{v}-\vec{w}) \\ &= (\vec{v},\vec{v}) - 2(\vec{v},\vec{w}) + (\vec{w},\vec{w}) \\ &= |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v},\vec{w}) + |\vec{w}|^2 \end{aligned} \tag{18.3}$$

Z założenia wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są prostopadłe. Zatem boki AB i AC trójkąta ΔABC są prostopadłe. Wobec tego trójkąt ΔABC jest trójkątem prostym.
Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że kwadrat długości przeciwprostokątnej $[B, C]$ równy jest sumie kwadratów długości przyprostokątnych $[A, B]$ i $[A, C]$, piszemy

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 \quad lub \quad |\vec{v}-\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2, \tag{18.4}$$

gdzie

$$|AB| = |\vec{v}|, \quad |AC| = |\vec{w}|, \quad |BC| = |\vec{v}-\vec{w}|.$$

Z równości (18.3) i (18.4) wynika równość stron

$$\begin{aligned} &|\vec{v}-\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 - 2(\vec{v},\vec{w}) + |\vec{w}|^2 \\ &|\vec{v}-\vec{w}|^2 = \vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2, \\ &|\vec{v}|^2 - 2(\vec{v},\vec{w}) + |\vec{w}|^2 = \vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2, \\ &-2(\vec{v},\vec{w}) = 0 \end{aligned}$$

Zatem iloczyn skalarny wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest równy zero

$$(\vec{v},\vec{w}) = 0,$$

jeżeli wektory $\vec{v} \perp \vec{w}$ są prostopadłe. Koniec dowodu warunku koniecznego. [4]

[4] Iloczyn skalarny $(\vec{v},\vec{w}) = 0$, wtedy i tylko wtedy, jeżeli $\vec{v} \perp \vec{w}$, w symbolach piszemy

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Longleftrightarrow (\vec{v},\vec{w}) = 0.$$

Przykład 18.5 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [6, 8, 0], \quad \vec{w} = [9, 12, 0].$$

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (18.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = [6, 8, 0], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = [9, 12, 0]$$

Zatem iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 6 * 9 + 8 * 12 + 0 * 0 = 54 + 96 = 150.$$

równy jest 100.
Wiemy, że kwadrat długości wektora $\vec{v} = [6, 8, 0]$ jest równy iloczynowi skalarnemu tego wektora przez siebie.

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = 6 * 6 + 8 * 8 + 0 * 0 = 36 + 64 = 100$$

Skąd długość wektora

$$|\vec{v}| = \sqrt{100} = 10.$$

Podobnie obliczamy długość wektora $\vec{w} = [9, 12, 0]$

$$\begin{aligned} |\vec{w}| &= \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} \\ &= \sqrt{9 * 9 + 12 * 12 + 0 * 0} \\ &= \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15. \end{aligned}$$

Przykład 18.6 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 6, 3], \quad \vec{w} = [3, 2, 4].$$

są prostopadłe?

Rozwiązanie. Obliczamy iloczyn skalarny stosując wzór (18.1) dla wektorów

$$\vec{v} = [v_1, v_2] = [m, 6, 3], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2] = [3, 2, 4]$$

Wektory są prostopadłe jeżeli ich iloczyn skalarny równy jest zero. Obliczamy iloczyn skalarny

$$(\vec{v}, \vec{w}) = m * 3 + 6 * 2 + 3 * 4 = 3m + 24 = 0.$$

Skąd iloczyn skalarny równy jest zero

$$6m + 24 = 0, \quad dla \quad m = -\frac{24}{3} = -8.$$

Istotnie sprawdzamy, że dla $m = -8$ iloczyn skalarny wektora $\vec{v} = [m, 6, 3]$ przez wektor $\vec{w} = [3, 2, 4]$ równy jest zero

$$(\vec{v}, \vec{w}) = -8 * 3 + 6 * 2 + 3 * 4 = 24 - 24 = 0$$

Odpowiedź: Wektory

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = [m, 6, 3], \quad i \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = [3, 2, 4]$$

są prostopadłe dla parametru $m = -8$.

Zadanie 18.2 *Oblicz iloczyn skalarny i długość wektorów*

$$\vec{v} = [12, 16, 0], \quad \vec{w} = [15, 20, 0].$$

Zadanie 18.3 *Dla jakiej wartości parametru m wektory*

$$\vec{v} = [m, 15, 2], \quad \vec{w} = [5, 3, 4].$$

są prostopadłe?

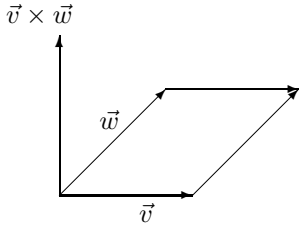
18.2.3 Iloczyn wektorowy w przestrzen trójwymiarowej R^3

Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad i \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

w przestrzeni trójwymiarowej

$$R^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \ -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty \}$$



Wynikiem mnożenia wektorowego wektora $\vec{v}$ przez wektor $\vec{w}$ jest trzeci wector $\vec{v} \times \vec{w}$, którego współrzędne obliczamy z rozwinięcia Laplace'a macierzy utworzenej ze współrzędnych wektorów

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right\}$$

Mianowicie iloczyn

$$\vec{v} \times \vec{w} = [Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\}, -Det(\left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\}), Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\}]$$

gdzie wyznaczniki -determinants

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{array} \right\} = v_2 * w_3 - v_3 * w_2,$$

$$-Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{array} \right\} = -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1),$$

$$Det \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{array} \right\} = v_1 * w_2 - v_2 * w_1$$

Skąd otzymamy wzór na współrzędne iloczynu wektorowy

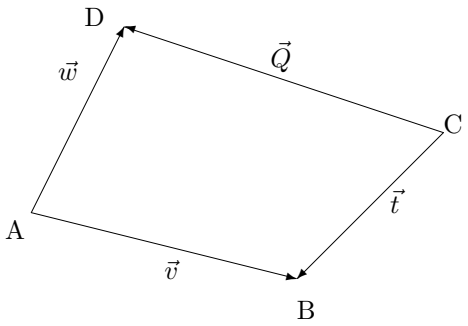
$$\vec{v} \times \vec{w} = [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]. \tag{18.5}$$

Wektor $\vec{v} \times \vec{w}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$, a jego o długość równa jest polu równoległoboku o bokach $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Zatem długość wektora

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{|v_2 * w_3 - v_3 * w_2|^2 + | - (v_1 * w_3 - v_3 * w_1)|^2 + |v_1 * w_2 - v_2 * w_1|^2}$$

18.2.4 Pole czworokąta. Przykłady

Rozpatrzymy czworokąt $ABCD$



o wierzchołkach

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$
$$C = (c_1, c_2, c_3), \quad D = (d_1, d_2, d_3)$$

rozpięty na wektorach

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = \vec{AD},$$
$$\vec{Q} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [t_1, t_2, t_3] = \vec{CD},$$

gdzie współrzędne wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{Q}$, $\vec{t}$ określamy przez różnice współrzędnych wierzchołków A, B, C, D czworokąta $ABCD$

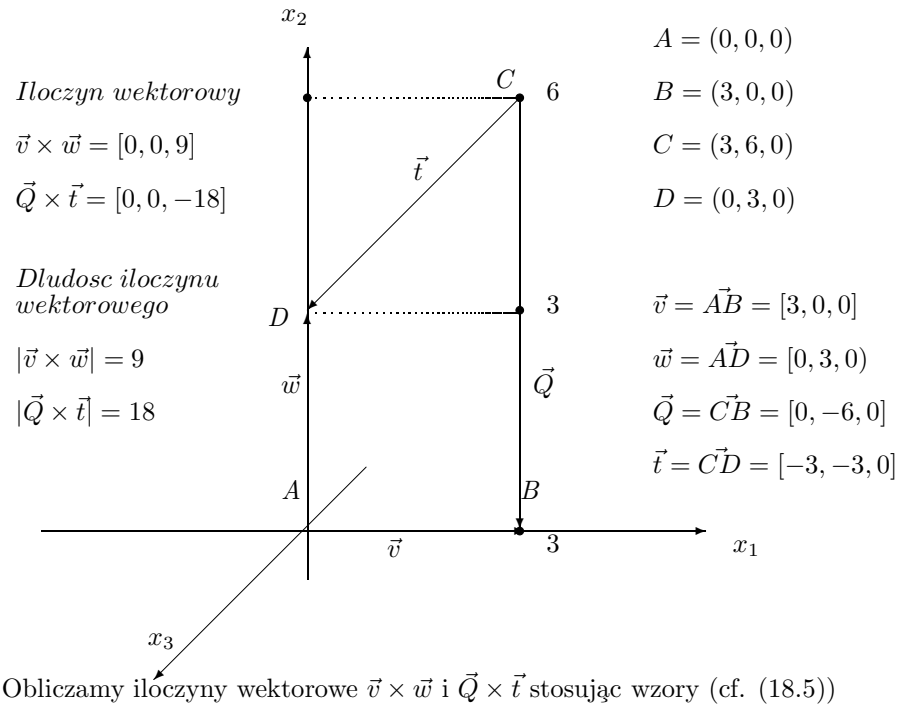
$$v_1 = b_1 - a_1, \quad v_2 = b_2 - a_2, \quad v_3 = b_3 - a_3,$$
$$w_1 = d_1 - a_1, \quad w_2 = d_2 - a_2, \quad w_3 = d_3 - a_3,$$
$$z_1 = b_1 - c_1, \quad z_2 = b_2 - c_2, \quad z_3 = b_3 - c_3,$$
$$t_1 = d_1 - c_1, \quad t_2 = d_2 - c_2, \quad t_3 = d_3 - c_3.$$

Stosując iloczyn wektorowy (cf. (18.5)) możemy obliczyć pole dowolnego czworokąta o danych współrzędnych jego wierzchołków. Mianowicie, pole czworokąta $ABCD$ równe jest połowie iloczynu wektorowego wektorów

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{Q} \times \vec{t}$$

Przykład 18.7 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [3, 0, 0] = \vec{AB}, \qquad \vec{w} = [0, 3, 0] = \vec{AD},$$
$$\vec{Q} = [0, -6, 0] = \vec{CB}, \qquad \vec{t} = [-3, -3, 0] = \vec{CD}$$



Iloczyn wektorowy

$\vec{v} \times \vec{w} = [0, 0, 9]$

$\vec{Q} \times \vec{t} = [0, 0, -18]$

Dludosc iloczynu wektorowego

$|\vec{v} \times \vec{w}| = 9$

$|\vec{Q} \times \vec{t}| = 18$

$A = (0, 0, 0)$

$B = (3, 0, 0)$

$C = (3, 6, 0)$

$D = (0, 3, 0)$

$\vec{v} = A\vec{B} = [3, 0, 0]$

$\vec{w} = A\vec{D} = [0, 3, 0)$

$\vec{Q} = C\vec{B} = [0, -6, 0]$

$\vec{t} = C\vec{D} = [-3, -3, 0]$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{Q} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (18.5))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 3 * 0, -(3 * 0 - 0 * 0), 3 * 3 - 0 * 0] \\ &= [0, 0, 9] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{Q} \times \vec{t} &= [-6 * 0 - 3 * 0, -(0 * 0 - 3 * 0), 0 * 3 - 6 * 3] \\ &= [0, 0, -18] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v},\ \vec{w}$ i $\vec{Q},\ \vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9^2} + \frac{1}{2}|\sqrt{0^2 + 0^2 + (-18)^2} \\ &= \frac{1}{2} * 9 + \frac{1}{2} * 18 \\ &= 4.5 + 9 = 13.5 \end{aligned}$$

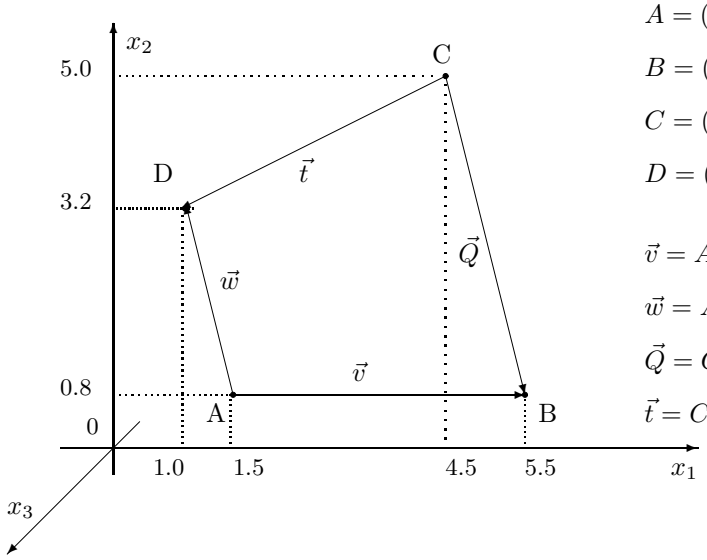
[5]

Rozpatrzmy inny przykład obliczania pola czworokąta stosując iloczyn wektorowy.

[5] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Przykład 18.8 *Oblicz pole czworokąta $ABCD$ rozpiętego na wektorach*

$$\vec{v} = [4.0, 0, 0] = \vec{AB},$$
$$\vec{w} = [-0.5, 2.4, 0] = \vec{AD},$$
$$\vec{Q} = [-1.0, 4.2, 0] = \vec{CB},$$
$$\vec{t} = [-3.5, -1.8, 0] = \vec{CD}$$



$$A = (1.5, 0.8, 0)$$
$$B = (5.5, 0.8, 0)$$
$$C = (4.5, 5.0, 0)$$
$$D = (1.0, 3.1, 0)$$

$$\vec{v} = \vec{AB} = [4.0, 0, 0]$$
$$\vec{w} = \vec{AD} = [-0.5, 2.4, 0)$$
$$\vec{Q} = \vec{CB} = [-1.0, 4.2, 0]$$
$$\vec{t} = \vec{CD} = [-3.5, -1.8, 0]$$

Obliczamy iloczyny wektorowe $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\vec{Q} \times \vec{t}$ stosując wzory (cf. (18.5))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 0 * 2.4, -(4 * 0 + 0.5 * 0), 4 * 2.4 + 0.5 * 0] \\ &= [0, 0, 9.6] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{Q} \times \vec{t} &= [4.2 * 0 + 1.8 * 0, -((-1) * 0 - (-3.5) * 0), 1 * 1.8 + 4.2 * 3.5] \\ &= [0, 0, 16.5] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v},\ \vec{w}$ i $\vec{Q},\ \vec{t}$.
Mianowicie

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9.6^2} + \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 16.5^2} \\ &= \frac{1}{2} * 9.6 + \frac{1}{2} * 16.5 \\ &= 4.8 + 8.25 = 13.05 \end{aligned}$$

6

[6] Długość wektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ o współrzędnych v_1, v_2, v_3 w przestrzeni kartezjńskiej R^3 obliczmy ze wzoru $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

18.2.5 Parametryczne równanie prostej w przestrzeni

Proste operacje na punktach i wektorach w przestrzeni prowadzą do parametrycznego określenia równania prostej.
Mianowicie, rozpatrzmy dwa punkty

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad A = (b_1, b_2, b_3),$$

i wektor

$$\vec{AB} = B - A.$$

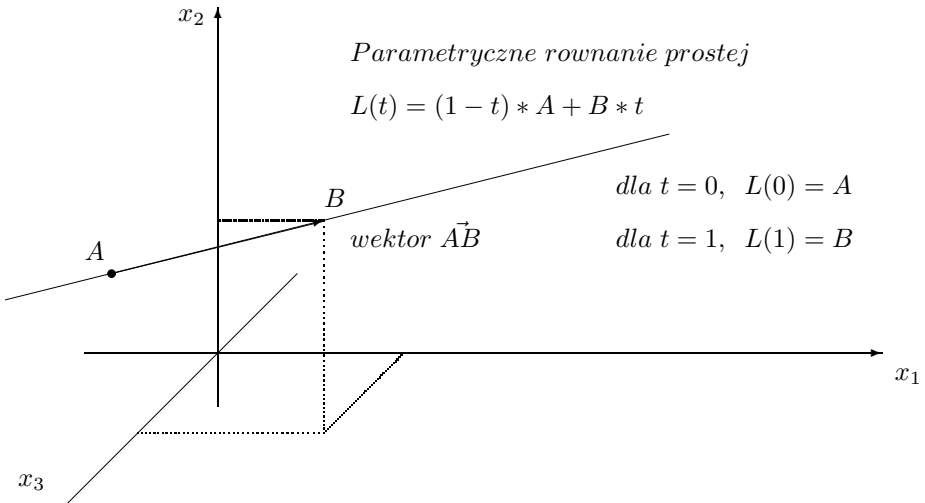
Wtedy łatwo piszemy równanie parametryczne prostej L

$$L(t) = A + t * \vec{AB}$$

lub

$$L(t) = (1 - t) * A + B * t.$$

Tutaj parametrem jest liczba t przebiegająca cały zbiór liczb rzeczywisty od minus nieskonoczności do plus nieskonoczności, piszemy $-\infty < t < \infty$.



Zauważmy, że jeżeli parametr t zmienia się od minus nieskończoności $-\infty$ do plus nieskończoności ∞, to punkt $L(t)$ poruszasza się wzdłuż prostej L.
Parametryczne równanie prostej, wyrażamy również w terminach danych punktów A i B. Ponieważ wektor $\vec{AB} = B - A$, to równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty A i B ma następującą postać:

$$L(t) = A + (B - A) * t,$$

lub $\quad L(t) = A + \vec{AB} * t,$

lub $\quad L(t) = (1 - t) * A + B * t, \quad -\infty < t < \infty.$

Przykład 18.9 *Napisz parametryczne równanie prostej*

(i) o początku w punkcie $A = (1, 2, -1)$ *i kierunku wektora* $\vec{v} = [2, -1, 4]$

(ii) przechodzącej przez punkty $A = (1, -1, 2)$ *i* $B = (2, 1, 2)$

Rozwiązanie.

(i) Podstawiamy dane:

1. punkt $A = (1, -1, 2)$ i wektor $\vec{v} = (2, -1, 4)$ do ogólnego równania

$$\begin{aligned} L(t) &= A + t * \vec{v} \\ &= (1, -1, 2) + t * (2, -1, 4) \\ &= (1 + 2t, -1 - t, 2 + 4t). \end{aligned}$$

Odpowiedź: $L(t) = (1 + 2t, -1 - t, 2 + 4t), \quad -\infty < t < \infty.$

(ii) Podstawiamy dane: punkt $a = (1, -1, 2)$ i punkt $B = (2, 1, 2)$ do ogólnego równania

$$\begin{aligned} L(t) &= (1-t)A + t * B = (1-t)(1, -1, 2) + t * (2, -1, 4) \\ &= ((1-t) + 2t, (1-t) - t, 2(1-t) + 4t) \\ &= (1 + t, 1 - 2t, 2 + 2t) \end{aligned}$$

Odpowiedź: $L(t) = (1 + t, 1 - 2t, 2 + 2t), \quad -\infty < t < \infty.$

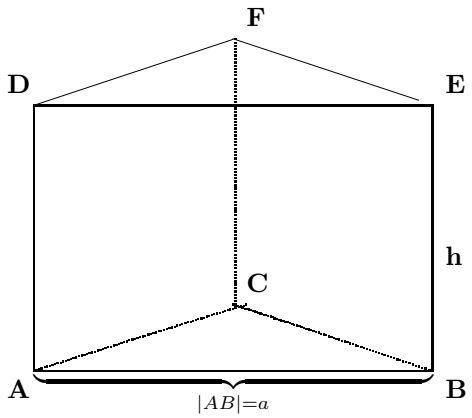
Zadanie 18.4 *Napisz parametryczne równanie prostej*

(i) o początku w punkcie $A = (0, 1, -1)$ *i kierunku wektora* $\overrightarrow{v} = [2, 1, 3]$

(ii) przechodzącej przez punkty $A = (3, 1, 2)$ *i* $B = (0, 2, 2)$

18.2.6 Graniastosłup o podstawie trójkąta równobocznego

Prostopadłościan o wierzchołkach A, B, C, D, E, F i podstawie trójkąta $\triangle ABC$ równobocznego o boku podstawy długości a.



Graniastosłup o podstawie trójkąta foremnego $\triangle ABC$, o długości boków

$$|AB| = |AC| = BC| = a$$

i o wysokości h ma pole powierzchni całkowitej składające się z dwóch podstaw i trzech ścian bocznych.

$$P_c = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a * h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a * h$$

Objętość tego graniastosłupa obliczamy z prostego wzoru

$$V = (\frac{a^2\sqrt{3}}{2}) * h$$

Przykład 18.10 *Dla graniastosłupa o podstawie trójkąta foremnego o boku podstawy* $a = 4$, *i wysokości graniastosłupa* $h = 6$, *oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość.

Rozwiązanie. Podstawiając dane $a = 4$ i $h = 6$ do wzorów na pole całkowitej powierzchni i objętość, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni graniastosłupa

$$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a * h = \frac{4^2\sqrt{3}}{2} + 3 * 4 * 6 = 8\sqrt{3} + 72$$

(ii) objętość graniastosłupa

$$V = (\frac{a^2\sqrt{3}}{2}) * h = (\frac{4^2\sqrt{3}}{2}) * 6 = 48\sqrt{3}.$$

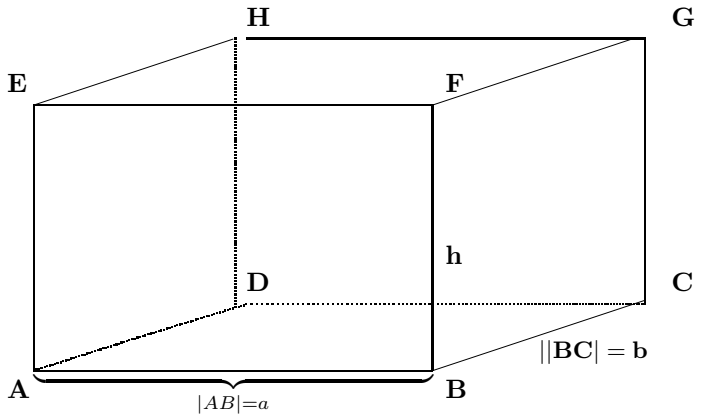
Zadanie 18.5 *Dla graniastosłupa o podstawie trójkąta foremnego o boku podstawy* $a = 2$, *i wysokości graniastosłupa* $h = 5$, *oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość.

18.2.7 Prostopadłościan o podstawie prostokąta

Prostopadłościan o podstawie prostokąta $ABCD$ o długości boków prostokąta $|AB| = a$, $|BC| = b$ i wysokości prostopadłościanu $|BF| = h$



Pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu składa się z dwóch podstaw i czterech ścian bocznych.

$$P_c = 2a * b + 2a * h + 2b * h.$$

Objętość prostopadłościanu obliczamy z prostego wzoru

$$V = a * b * h$$

Przykład 18.11 *Dla prostopadłościanu o podstawie prostokąta o wymiarach* $a = 4,\ b = 5$ *i wysokości* $h = 6$*, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu,

(ii) objętość prostopadłościanu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu

$$P_c = 2a * b + 2a * h + 2b * h = 2 * 4 * 5 + 2 * 4 * 6 + 2 * 5 * 6 = 148.$$

(ii) objętość prostopadłościanu $V = a * b * h = 4 * 5 * 6 = 120$.

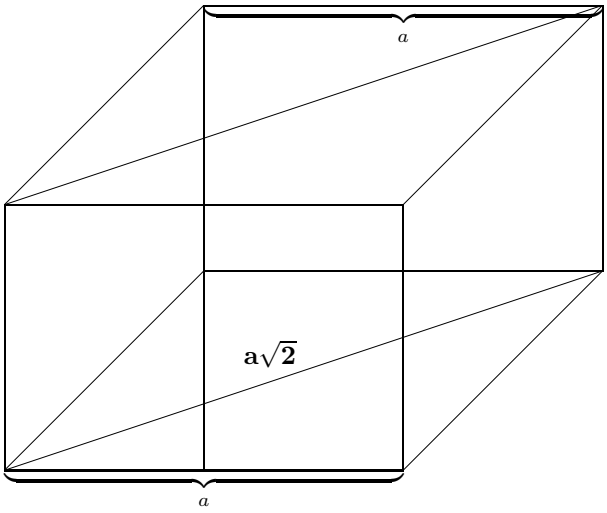
Zadanie 18.6 *Dla prostopadłościanu o podstawie prostokąta o wymiarach* $a = 2,\ b = 3$ *i wysokości* $h = 5$*, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu,

(ii) objętość prostopadłościanu.

18.2.8 Sześcian foremny

Sześcian foremny jest prostopadłościanem, który ma wszystkie sześć ścian kwadratami o boku a.



Sześcian Foremny o boku a

Powierzchnia $P_c = 6a^2$

Objętość $V = a^3$

Przekątna podstawy $= a\sqrt{2}$

Przekątna sześcianu $= a\sqrt{3}$

W sposób oczywisty znajdujemy, że

Pole powierzchni calkowitej	$P_c = 6a^2$.
Objetosc	$V_c = a^3$.
Przekatna podstawy	$d_p = a\sqrt{2}$.
Przekatna szescianu	$d = a\sqrt{3}$.

Przykład 18.12 *Dla sześcianu o boku $a = 4$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu,

(ii) objętość sześcianu.

(iii) przekątną podstawy sześcianu.

(iv) przekątna sześcianu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu $P_c = 6a^2 = 6 * 4^2 = 96$,

(ii) objętość sześcianu $V_c = a^3 = 4^3 = 64$.

(iii) przekątną podstawy sześcianu $d_p = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

(iv) przekątna sześcianu $d = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Zadanie 18.7 *Dla sześcianu o boku $a = 5$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu,

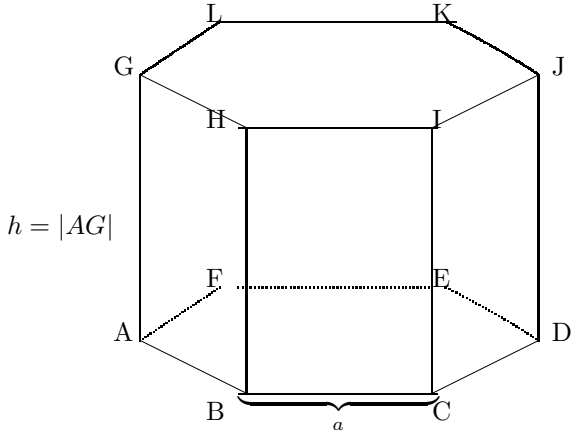
(ii) objętość sześcianu.

(iii) przekątną podstawy sześcianu.

(iv) przekątna sześcianu.

18.2.9 Graniastosłup o podstawie sześciokąta foremnego

Powierzchnia całkowita i objętość graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego składa się z dwóch podstaw i sześciu ścian. Łatwo obliczamy pole całkowitej powierzchni i objętość graniastosłupa o podstawie sześciokąta formnego znając bok podstawy a i wysokość h.



Pole podstawy tego graniastosłupa składa się z pól 6-ciu trójkątów równocznych

$$P_{podstawy} = 6 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Pole całkowite powierzchni graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego

$$\begin{aligned} P_c = 2P_{podstawy} + 6 * a * h &= 2\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 6a * h, \\ P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6a * h & \end{aligned}$$

Objętość graniastosłupa o pdstawie sześciokąta foremnego

$$V = P_{podstawy} * h = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} * h$$

Przykład 18.13 *Dla graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego o boku $a = 2$ wysokości $h = 4$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów na całkowitą powierzchie i objętość, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni

$$P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6a * h = 3 * 2^2\sqrt{3} + 6 * 2 * 4 = 12\sqrt{3} + 48.$$

(ii) objętość tego graniastosłupa

$$V = P_l * h = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} * h = \frac{3 * 2^2\sqrt{3}}{2} * 4 = 6\sqrt{3}$$

Zadanie 18.8 *Dla graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego o boku $a = 4$ wysokości $h = 5$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość.

18.3 Ostrosłupy

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego podstawą jest dowolny wielokąt a ściany boczne są trójkąmi o wspólnym wierzchołku. Wśród ostrosłupów wyróżniamy ostrosłupy foremne, których podstawą jest wielokąd foremny i spodek wysokości leży w środku okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

18.3.1 Czworościan foremny

Czworościan foremny ma wszystkie cztery ściany, które są trójkątami równobocznymi. Zatem, kąty ścian mają 60^o lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{3}$ radianów. Pole powierzchni każdej ze ścian $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gdzie a oznacza długość każdej z krawędzi czworościanu.
Pole powierzchni całkowitej czwrościanu foremnego równa się czterem razy pole powierzchni jednej ze ścian.

$$P_c = a^2\sqrt{3}.$$

Krawędź l czworościanu obliczamy z twierdzenia Pitagorasa. Mianowicie, wiemy, że wysokość ściany bocznej $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Jej spodek leżey w połowie krawędzi podstawy $\frac{a}{2}$. Zatem obliczamy

$$l^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 = (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{a^2}{4}$$

Objętość czworościanu formnego równa jest jednej trzeciej pola podstawy razy wysokość H

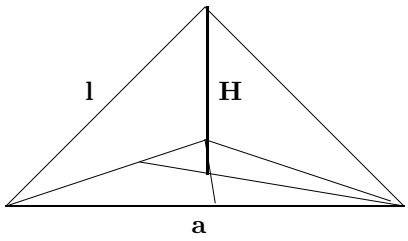
$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * H$$

Wysokość H obliczamy w zależności od danej krawędzi a. Mianowicie, spodek wysokości h ściany bocznej leży na przecięciu wysokości podstawy w punkcie odległym od wierzchołka trójkąta o $\frac{2}{3}h = \frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Krawędź czworościanu $l = a$. Z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy wysokość czworościanu

$$H^2 = a^2 - (\frac{2}{3}h)^2 = a^2 - (\frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{2}{3}a^2, \quad H = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Zatem objętość czworościanu

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * H = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$



Czworościan Foremny $P_c = a^2\sqrt{3},\ V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$

18.3.2 Ostrosłup prawidłowy o podstawie kwadratu

Oznaczenia:

- a bok kwadratu w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędź boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa

- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzchni całkowitej ostrosłupa
- V objętość ostrosłupa

Jasne, że pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu kwadratu $P_a = a^2$ o boku a. Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu czterech trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości **h**. Natomiast, pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Wtedy pole ściany bocznej

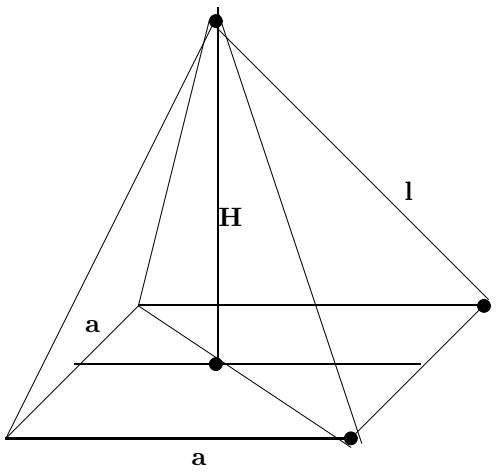
$$P_0 = \frac{1}{4}a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu czterech trójkątów w podstawie o boku a plus pola cztery trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = a^2 + 4P_0, \qquad P_c = a^2 + a\sqrt{4l^2 - a^2}$$

i objętość ostrosłupa foremnego

$$V = \frac{1}{3}a^2 * H$$



Ostrosłup Foremny o Podstawie Kwadratu $\mathbf{P_c = a^2 + a\sqrt{4l^2 - a^2}}$, $\mathbf{V = \frac{1}{3}a^2 * H}$

18.3.3 Ostrosłup foremny o podstawie sześciokąta

Oznaczenia:

- a bok sześciokąta w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędź boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa
- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzchni całkowitej ostrosłupa
- V objętość ostrosłupa

Jasne, że pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu P_a sześciokąta foremnego o boku a

$$P_a = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu sześciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości **h**. Pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Wtedy pole ściany bocznej

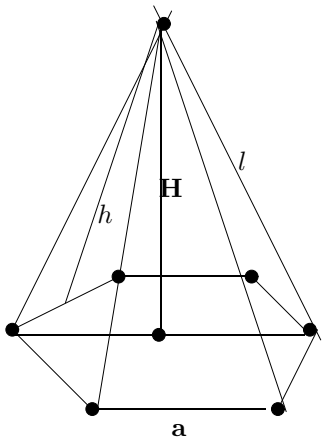
$$P_0 = \frac{1}{4}a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu sześciokąta foremnego w podstawie o boku a plus pola sze{sciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = P_a + 6P_0, \qquad P_c = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{4}a\sqrt{4l^2 - a^2} \qquad P_c = \frac{3}{2}[a^2\sqrt{3} + a\sqrt{4l^2 - a^2}].$$

i objętość ostrosłupa foremnego

$$V = \frac{1}{3}\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} * H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} * H$$



Ostrosłup $P_c = \frac{3}{2}[a^2\sqrt{3} + a\sqrt{4l^2 - a^2}],\ V = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} * H$

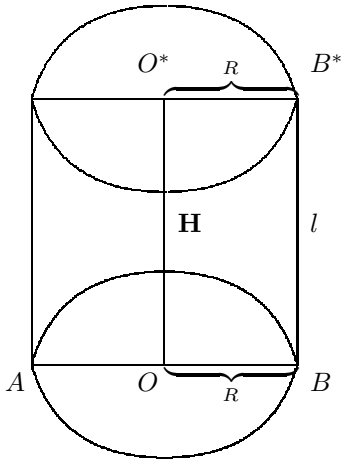
18.4 Bryły obrotowe

Wśród brył obrotowych wyróżniamy walec, stożek i kulę.

18.4.1 Walec

Walec powstaje z obrotu prostokąta wokół jednego z jego boków. Prosty kształt walca prowadzi do oczywistych wzorów na jego całkowitą powierzchnie i objętość.

Na niżej podanym rysunku mamy zaznaczony promień r i wysokość h walca o średnicy podstawy $AB = 2R$ oraz promirniu górnej podstawy $O^*B^* = R$. Literami O^* i B^* oznaczone są środki okręgów w dolnej i górnej podstawie.



Powierzchnia całkowita walca wyrażona jest przez promień R i wysokość H.

$$P_c = 2\pi RH.$$

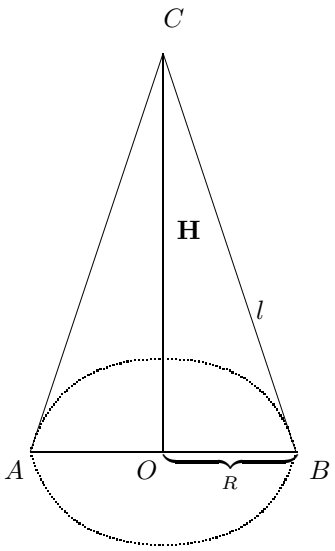
i objętość walca

$$V = \pi R^2 \, H.$$

18.4.2 Stożek

Stożek powstaje z obrotu trójkąta prostokątnego wokół jednej z jego przyprostokątnych. Oznaczenia:

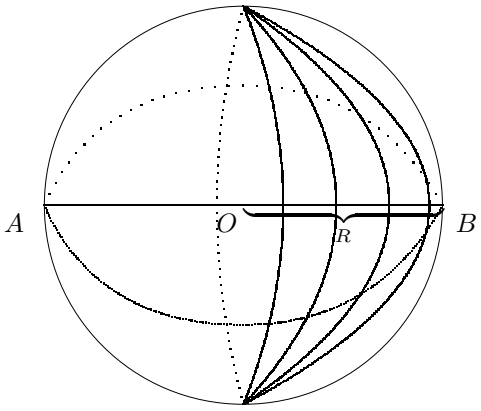
- R promień podstawy stożka
- l tworząca stożka
- H wysokść stożka
- średnica $AB = 2R$ podstawy stożka
- środek O podastawy stożka o wierzchołku C
- P_l powierzchnia boczna stożka
- P_c powierzchnia całkowita stożka
- V objętość stożka



- powierzchnia podstawy stożka $P_0 = \pi R^2$,
- powierzchnia boczna stożka $P_l = 2\pi R \, l$
- powierzchnia całkowita stożka $P_c = \pi R(R + H)$
- objętość stożka $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

18.4.3 Kula

Kula o środku O promieniu R ma powierzchnie $P = 4\pi R^2$ i objętość $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



Przykład 18.1 *Oblicz powierzchnie i objętość kuli o promieniu $R = 5$.*

Rozwiązanie. Podstawiając $R = 5$ do wzoru na powierzchnię kuli

$$S = 4\pi R^2$$

i do wzoru na objętość kuli

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

obliczamy powirzchnię kuli

$$S = 4\pi * 5^2 = 100\pi$$

i objętość kuli

$$V = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{500}{3}\pi$$

Chapter 19

Trygonometria

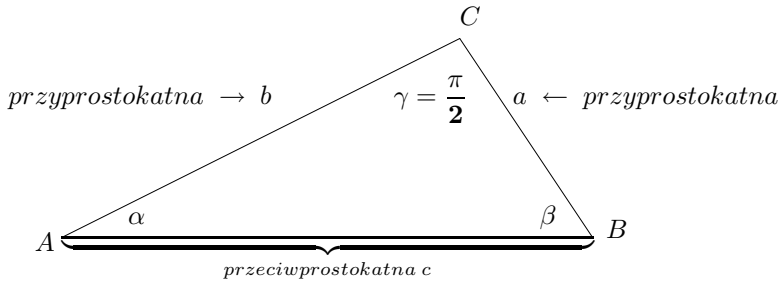
Trygonometria to wiedza o związkach miarowych pomiedzy bokami i kątami trójkątów. Takie znaczenie słowa *Trygonometria* było używane w czasach starożytnych w Babilonie, Egipcie i Grecji.

19.1 Funkcje trygonometryczne

- $\sin\ \alpha$, czytamy sinus α, $\cos\ \alpha$, czytamy cosinus α,
- $\mathrm{tg}\ \alpha$ lub $\tan\ \alpha$, czytamy tangens α,
- $\mathrm{ctg}\ \alpha$ lub $\mathrm{ctg}\ \alpha$, czytamy cotangence α,
- $\sec\ \alpha$, czytamy secant α, $\mathrm{csc}\ \alpha$, czytamy cosecant α,
- $\sinh\ \alpha = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$, czytamy sinus hiperboliczny α,
- $\cos h\ \alpha = \dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$, czytamy cosinus hiperboliczny α

Funkcje trygonometryczne określamy w trójkącie prostokątnym lub na kole trygonometrycznym.
Rozpatrzmy trójkąt prostokątny $\triangle ABC$ o wierzchołkach A, B, C przyprostpkątnych AC i BC oraz przeciwprostokątnej AB.

[1]



Długości przyprostokątnych i przeciwprostokątnej oznaczamy małymi literami, piszemy

$$a = |BC|, \quad b = |AC|, \quad c = |AB|.$$

Defimnicja 19.1 *Sinus kąta α to stosunek przyprostokątnej a leżącej naprzeciw kąta α do przeciwprostokątnej c*

$$\sin\ \alpha = \frac{a}{c}$$

Defimnicja 19.2 *Cosinus kąta α to stosunek przyprostokątnej b przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej c*

$$\cos\ \alpha = \frac{b}{c}$$

Defimnicja 19.3 *Tangens kąta α to stosunek przyprostokątnej a leżącej naprzeciw kąta α do przyprostokątnej b przyległej do kąta α*

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b} \quad \text{lub} \quad \mathrm{tan}\alpha = \frac{a}{b}$$

Defimnicja 19.4 *Cotangens kąta α to stosunek przyprostokątnej b leżącej przyległej do kąta α do przyprostokątnej a leżącej na przeciw kąta α*

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{lub} \quad \mathrm{ctan}\alpha = \frac{b}{a}$$

Defimnicja 19.5 *Secant kąta α to odwrotność sinusa kąta α. Zatem*

$$\mathrm{sec}\alpha = \frac{c}{a}$$

Defimnicja 19.6 *Cosecant kąta α to odwrotność cosinusa kąta α. Zatem*

$$\mathrm{sec}\alpha = \frac{c}{b}$$

Zauważmy, że odwrotność tangensa kąta α równa jest cotangensowi kąta α i odwrotność cotangensa kąta α równa jest tangensowi kąta α

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha, \quad \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$$

[1] W matematyce wyższej funkcje trygonometrytczne okeślane są przez szeregi potęgowe

Przykład 19.1 *Podaj wartości funkcji trygonometrycznych określonych w trójkącie prostokątnym o bokach* $a = 3,\ b = 4,\ c = 5$

Rozwiązanie. Kąty tego trójkąta prostokątnego $\alpha = 30^o, \beta = 60^o,\ \gamma = 90^o$

$$sin\ \alpha = \frac{3}{5}, \quad cos\ \alpha = \frac{4}{5}, \quad tg\ \alpha = \frac{3}{4},$$
$$ctg\ \alpha = \frac{4}{3}, \quad sec\alpha = \frac{5}{3}, \quad csc\alpha = \frac{5}{4}.$$

Zauważmy, że określenie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym dotyczy tylko kątów

$$0 \leq \alpha \leq 90^o \quad lub\ w\ mierze\ lukowej\ \ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ponieważ kąty α i β w trójkącie prostokątnym zmieniają się od zera do kąta prostego. W tym dla $\alpha = 0$ cotangens i secant są nieokreślone.

Również dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tangens i cosecant nie są określone.
Niżej podamy deficje funkcji trygonometrycznych na kole trygonometrycznym. Funkcje sinus i cosinus określone są dla wszystkich wartości rzeczywistych argumentu $\alpha \in \{-\infty, \infty\}$.
Natomiast funkcje tangens określona jest dla rzeczwistych wartości argumentu $\alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k = 0, 1, 2, ...;$
a funkcja cotangens określna jest dla wszystkich rzeczywistych warto.sci agumentu $\alpha \neq k\pi,\ k = 0, 1, 2, 3, ...;$

Wartości funkcji sinus i cosinus leżą w przedziel domkinętym $[-1, 1]$. wartości funkcji tangens i cotanges przebiegają cały zbió liczb rzeczywistych od minus nieskończoności $-\infty$ do plus nieskończoności ∞.

Znak wartości fukcji trugonometrycznych zależy od ćwiartki pierwszej I, drugiej II, trzeciej lub czwartej IV do której należy argument α.
Dla okeślenia znaku wartości funkcji trygonometrycznych stosujemy heurystyczną zasadę:

W pierwszej ćwiarte wszystkie są dodatnie sinus, cosinus, tangens i cotangens, w drugie tylko sinus jest dodatni, w trzeciej tangens i cotangens są dodatnie, a w czwartej tylko cosinus jest dodatni.

Zadanie 19.1 *Oblicz wartość wyrażenia trygonometrycznego*

$$(i) \quad sin\frac{\pi}{6} + cos\frac{\pi}{6}$$
$$(ii) \quad tg\frac{\pi}{6} + ctg\frac{\pi}{6}$$

Zadanie 19.2 *Oblicz wartość wyrażenia trygonometrycznego*

$$(i) \quad sin\frac{4\pi}{3} + cos\frac{4\pi}{3}$$
$$(ii) \quad tg\frac{4\pi}{3} + ctg\frac{4\pi}{3}$$

Zadanie 19.3 *Oblicz wartość wyrażenia trygonometrycznego*

$$\frac{sin\frac{\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4}}{tg\frac{\pi}{4} + ctg\frac{\pi}{4}}$$

19.2 Koło trygonometryczne.

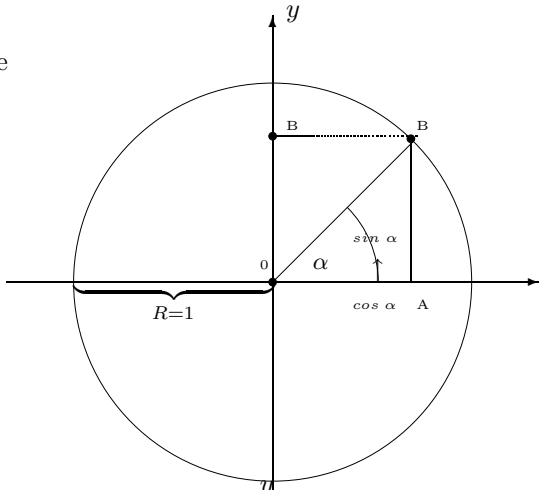
Dla wszystkich kątów o wartościach rzeczywistych, ujemnych lub dodatnich, funkcje trygonometryczne definiujemy w kole trygonometrycznym.

Koło trygonometryczne

pierwsza ćwiartka I

$sin\ \alpha = |AB|$

$cos\ \alpha = |OA|$

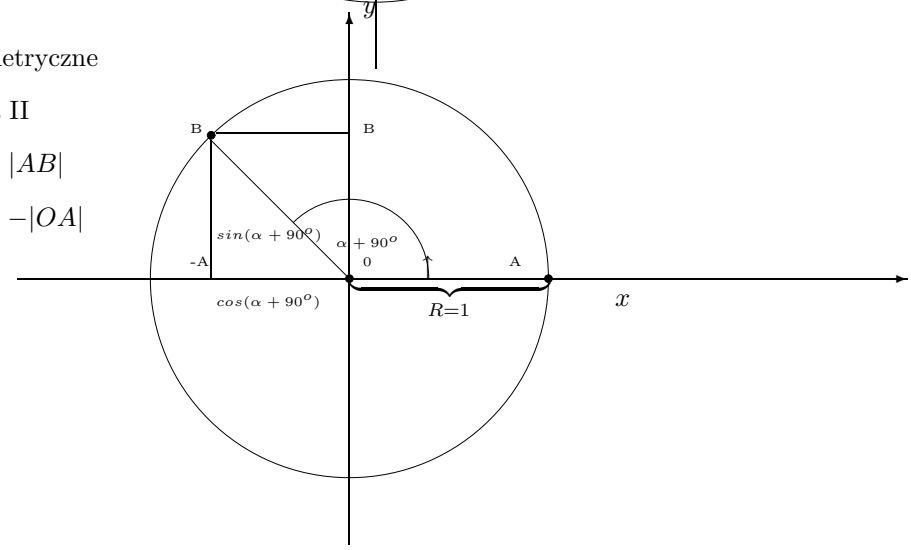


Koło trygonometryczne

druga ćwiartka II

$sin(\alpha + 90^o) = |AB|$

$cos(\alpha + 90^o) = -|OA|$

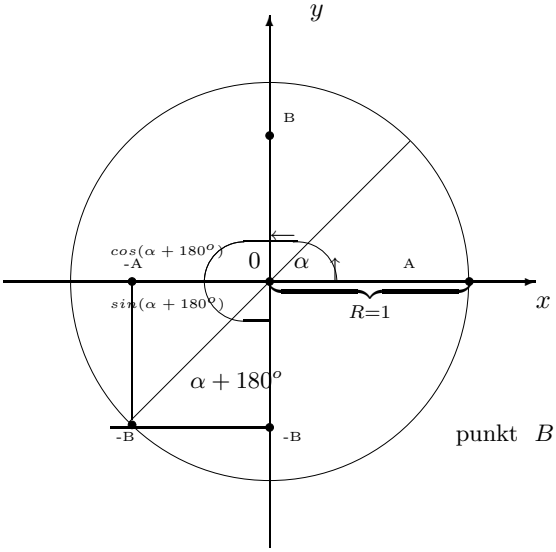


Koło trygonometryczne

trzecia ćwiartka III

$cos\ (\alpha + 180^o) = -|OA|$

$sin\ (\alpha + 180^o) = -|AB|$



punkt $B = (x_1, y_1)$

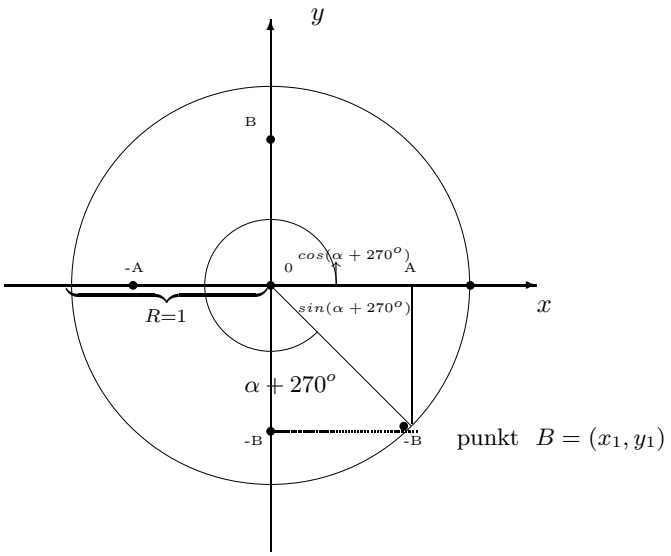
x

Koło trygonometryczne

czwarta ćwiartka IV

$sin(\alpha + 270^o) = -|AB|$

$cos(\alpha + 270^o) = |OA|$



x

Defimnicja 19.7 *Sinus kąta α to stosunek współrzędnej* $\mathbf{y_1}$ *do promienia* $\mathbf{R}$

$$\sin\ \alpha = \frac{y_1}{R}$$

Defimnicja 19.8 *Cosinus kąta α to stosunek współrzędnej* $\mathbf{x_1}$ *do promienia* $\mathbf{R}$

$$\cos\ \alpha = \frac{x_1}{R}$$

Defimnicja 19.9 *Tangens kąta α to stosunek współrzędnej* $\mathbf{y_1}$ *do wpsółrzędnej* $\mathbf{x_1}$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{y_1}{x_1}, \quad x_1 \neq 0,$$

Defimnicja 19.10 *Cotangens kąta α to stosunek współrzędnej* $\mathbf{x_1}$ *do wpsółrzędnej* $\mathbf{y_1}$

$$\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{x_1}{y_1}, \quad y_1 \neq 0,$$

Defimnicja 19.11 *Secant kąta α to odwrotność sinusa kąta α. Zatem*

$$\sec\ \alpha = \frac{R}{y_1}, \quad y_1 \neq 0,$$

Defimnicja 19.12 *Cosecant kąta α to odwrotność cosinusa kąta α. Zatem*

$$\mathrm{csc}\ \alpha = \frac{R}{x_1}, \quad x_1 \neq 0.$$

Ponieważ secant i cosecant określone są przez sinus i cosinus, dlatego dalej wystarczy rozpatrywać cztery funkcje trygonometryczne sinus, cosinus, tangens i cotangens.

19.2.1 Wzory redykcyjne

Wprost z definicji funkcji trygonometrycznych zauważamy, że wszystkie funkcje są nieujemne w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego, gdyż dla kąta

$$0 \leq \alpha \leq 90^o,$$

współrzędne punktu $p = (x_1, y_1)$ są nieujemne, to jest $x_1 \geq 0,\ y_1 \geq 0$ i promień $R > 0$.
W drugiej ćwiartce tylko sinus ($\sin\ \alpha \geq 0$), jest nieujemny, gdyż współrzędna $y_1 \geq 0$.
W trzeciej ćwiartce tangens i cotanges ($\mathrm{tg}\alpha \geq 0,\ \mathrm{ctg}\alpha \geq 0$), są nieujemne, gdyż obie współrzędne $x_1 \leq 0, y_1 \leq 0$ są ujemne i wtedy iloraz $(\frac{y_1}{x_1} \geq 0)$ lub $(\frac{x_1}{y_1} \geq 0)$.
W czwartej ćwiartce tylko cosinus ($\cos\ \alpha \geq 0$) jest nieujemny, gdyż współrzędna $x_1 \geq 0$.
W tej pozycji kąta α, z wykresu koła trygonometrycznego odczytujemy wartości funkcji trygonometrycznych zapisane w niżej podanej tabeli

$0 \leq \alpha \leq 90^o$	$\sin\ \alpha \geq 0$	$\cos\ \alpha \geq 0$	$\mathrm{tg}\alpha \geq 0$	$\mathrm{ctg}\alpha \geq 0$
$90^o \leq \alpha \leq 180^o$	$\sin\ \alpha \geq 0$	$\cos\ \alpha \leq 0$	$\mathrm{tg}\alpha \leq 0$	$\mathrm{ctg}\alpha \leq 0$
$180^o \leq \alpha \leq 270^o$	$\sin\ \alpha \leq 0$	$\cos\ \alpha \leq 0$	$\mathrm{tg}\alpha \geq 0$	$\mathrm{ctg}\alpha \geq 0$
$270 \leq \alpha \leq 360^o$	$\sin\ \alpha \leq 0$	$\cos\ \alpha \geq 0$	$\mathrm{tg}\alpha \leq 0$	$\mathrm{ctg}\alpha \leq 0$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta α osiągają już w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego wszystkie możliwe wartości bezwzględne (z dokładnością do znaku). Zatem, inne wartości różnią się od nich jedynie znakiem. Te różnice ustalają wzory redukcyjne, które podajemy niżej.
Najpierw, zauważmy, że jeżeli kąt $0 \leq \alpha \leq 90^o$ leży w pierwszej ćwiartce to kąt $90^o - \alpha$ też leży w pierwszej ćwiartce oraz kąt $90^o + \alpha$ leży w drugiej ćwiartce. Natomiast, kąt $-\alpha$ leży w czwartej ćwiartce. W tej pozycji kąta α, z wykresu koła trygonometrycznego odczytujemy wartości funkcji trygonometrycznych zapisane w niżej podanej tabeli

$\sin(90^o - \alpha) = \cos\ \alpha$	$\sin(90^o + \alpha) = \cos\ \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin\ \alpha$
$\cos(90^o - \alpha) = \sin\ \alpha$	$\cos(90^o + \alpha) = -\sin\ \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\ \alpha$
$\mathrm{tg}(90^o - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}(90^O + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}(90^O - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(90^O + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$

Teraz, zauważmy, że jeżeli kąt $0 \leq \alpha \leq 90^o$ leży w pierwszej ćwiartce to kąt $180^o - \alpha$ leży w drugiej ćwiartce oraz kąt $180^o + \alpha$ leży w trzeciej ćwiartce.

$\sin(180^o - \alpha) = \sin\ \alpha$	$\sin(180^o + \alpha) = -\sin\ \alpha$
$\cos(180^o - \alpha) = -\cos\ \alpha$	$\cos(180^o + \alpha) = -\cos\ \alpha$
$\mathrm{tg}(180^o - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}(180^O + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}(180^O - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(180^O + \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$

Zauważmy podobnie, że jeżeli kąt $0 \leq \alpha \leq 90^o$ leży w pierwszej ćwiartce to kąt $270^o - \alpha$ leży w trzeciej ćwiartce oraz kąt $180^o + \alpha$ leży w czwartej ćwiartce. Zatem, mamy następujące wzory redukcyjne:

$\sin(270^o - \alpha) = -\cos\ \alpha$	$\sin(270^o + \alpha) = -\cos\ \alpha$
$\cos(270^o - \alpha) = -\sin\ \alpha$	$\cos(270^o + \alpha) = \sin\ \alpha$
$\mathrm{tg}(270^o - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}(270^O + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$
$\mathrm{ctg}(270^O - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(270^O + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

Niżej w tablicy podajemy zebrane wzory redukcyjne w mierze łukowej kątów.

Kąt	sinus	cosinus	tangens	cotangens
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\ \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\ \alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\ \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\ \alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$(\cos\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha$	$\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$
$2\pi-\alpha$	$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(2\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(2\pi-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$

19.3 Zadania

Zadanie 19.4 *Długości boków trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$ są równe, odpowiednio*

$$a=|BC|=6,\quad b=|AC|=8,\quad c=|AB|=10$$

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych

$$sin\ \alpha,\quad sin\ \beta,\quad cos\ \alpha,\quad cos\ \beta,$$

$$tg\ \alpha,\quad tg\ \beta,\quad ctg\ \alpha,\quad ctg\ \beta$$

kątów α, β leżących naprzeciw odpowiednich boków BC, AC.

Zadanie 19.5 (i) *Narysuj położenie punktów*

$$p=(p_1,p_2)=(\sqrt{3},1),\quad q=(q_1,q_2)=(-\sqrt{3},-1).$$

na kole trygonometrycznych o promieniu $R=2$.
(ii) *Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{llll}
(a)\ sin\ 30^0 = \frac{p_2}{R} & & sin\ 60^0 = \frac{p_1}{R} \\
(b)\ cos\ 30^0 = \frac{p_1}{R} & & cos\ 60^0 = \frac{p_2}{R} \\
(c)\ tg\ 30^0 = \frac{p_2}{p_1} & & tg\ 60^0 = \frac{p_1}{p_2} \\
(d)\ ctg\ 30^0 = \frac{p_1}{p_2} & & ctg\ 60^0 = \frac{p_2}{p_1}
\end{array}$$

(iii) *Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{llll}
(a)\ sin\ 210^0 = \frac{q_2}{R} & & sin\ 240^0 = \frac{q_1}{R} \\
(b)\ cos\ 210^0 = \frac{q_1}{R} & & cos\ 240^0 = \frac{q_2}{R} \\
(c)\ tg\ 210^0 = \frac{q_2}{q_1} & & tg\ 240^0 = \frac{q_1}{q_2} \\
(d)\ ctg\ 210^0 = \frac{q_1}{q_2} & & ctg\ 240^0 = \frac{q_2}{q_1}
\end{array}$$

Zadanie 19.6 *Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

$$\begin{array}{ll}
(a)\ sin\ 120^0 & sin\ 150^0 \\
(b)\ cos\ 120^0 & cos\ 150^0 \\
(c)\ tg\ 120^0 & tg\ 150^0 \\
(d)\ ctg\ 120^0 & ctg\ 150^0
\end{array}$$

Zadanie 19.7 *Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

(a) $sin\ 210^0$ $sin\ 240^0$

(b) $cos\ 210^0$ $cos\ 240^0$

(c) $tg\ 210^0$ $tg\ 240^0$

(d) $ctg\ 210^0$ $ctg\ 240^0$

Zadanie 19.8 *Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych*

(a) $sin\ 300^0$ $sin\ 330^0$

(b) $cos\ 300^0$ $cos\ 330^0$

(c) $tg\ 300^0$ $tg\ 330^0$

(d) $ctg\ 300^0$ $ctg\ 330^0$

Zadanie 19.9 (i) *Oblicz okres następującej funkcji:*

(a) $f(x) = sin\frac{1}{3}x,$ (b) $f(x) = cos\frac{1}{3}x.$

(c) $f(x) = tg\frac{1}{3}x,$ (d) $f(x) = ctg\frac{1}{3}x.$

Zadanie 19.10 *Narysuj wykres funkcji*

(i) $f(x) = sin\frac{1}{3}x, \quad dla \quad 0 \leq x \leq 6\pi$

(ii) $f(x) = tg\frac{1}{3}x \quad dla \quad -3\pi \leq x \leq 3\pi$

(iii) $f(x) = ctg\frac{4}{3}x \quad dla \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$

19.3.1 Funkcje periodyczne

Funkcja $f(x)$ jest periodyczna, jeżeli istnieje liczba dodatnia $\omega > 0$ taka, że

$$f(x + \omega) = f(x), \tag{19.1}$$

dla każdej rzeczywistej wartości argumentu należącego do dziedziny $x \in D$. [2]
Jasne, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest periodyczna o okresie $\omega > 0$, to zachodzi następująca tożsamość:

$$f(x + k\ \omega) = f(x), \qquad x \in D,$$

dla każdego całkowitego $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
Okresem funkcji $f(x)$ nazywamy najmiejszą z liczb $\omega > 0$, która spełnia tożsamość (19.1). [3]

[2] Dziedziną funakcji $f(x)$ nazywamy zbiór argumentów x dla których $f(x)$ jest określona
[3] Tożsamość znaczy, że równość zachodzi dla wszystkich wartości x w dziedzinie tożsamości $x \in D$.

Niżej sprawdzimy, że *funkcje trygonometryczne są periodyczne.*
Mianowicie, zauważamy, że jeżeli promień R obróci się o 360^o lub w mierze łukowej o 2π, to punkt $p = (x_1, y_1)$ wróci do pozycji wyjściowej. Co wiecej, jeżeli promień R obróci się w kierunku dodatnim lub ujemnym o wielokrotność okresu $\omega = 360^o$ lub w mierze łukowej o wielokrotność $\omega = 2\pi$, to punkt $p = (x_1, y_1)$ też wróci do pozycji wyjściowej.
Okresem funkcji sinus i cosinus jest liczba $\omega = 360^o$ lub w mierze łukowej liczba $\omega = 2\pi$. Natomiast, dla funkcji tanges i cotangens okresem jest liczba miejsza $\omega = 180^o$ lub w mierze łukowej $\omega = \pi$. Istotnie, funkcje tangens i cotangens osiągają te same wartości w pierwszej i w trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego, gdyż

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y_1}{-x_1}, \quad \text{oraz} \quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{x_1}{y_1} = \frac{-x_1}{-y_1}, \quad x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0.$$

Przykład 19.2 *Oblicz okres następującej funkcji:*

$$f(x) = \sin\frac{3}{2}x$$

Rozawiązanie. Wiemy, że funkcja sinus ma okres 2π. Zatem okresem funkcji $f(x)$ jest liczba ω taka, że

$$f(x+\omega) = \sin\frac{3}{2}(x+\omega) = \sin(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\omega) = \sin\frac{3}{2}x = f(x)$$

dla każdego rzeczywistego x.

Skąd obliczamy okres

$$\frac{3}{2}\omega = 2\pi, \quad \omega = \frac{4}{3}\pi$$

Sprawdzamy, że okresem funkcji $f(x)$ jest liczba $\omega = \frac{4}{3}\pi$. Istotnie, mamy równość

$$\begin{aligned} f(x+\omega) = f(x+\frac{4}{3}\pi) &= \sin\frac{3}{2}(x+\frac{4}{3}\pi) \\ &= \sin(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\frac{4}{3}\pi). \\ &= \sin(\frac{3}{2}x + 2\pi) = \sin\frac{3}{2}x = f(x). \end{aligned}$$

19.3.2 Zadania

Zadanie 19.11 *Oblicz okres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{\pi x}{2}$$
$$(ii) \quad cos\frac{\pi x}{2}$$

Zadanie 19.12 *Podaj wykres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{\pi x}{4}, \quad -4\pi \leq x \leq 4\pi$$
$$(ii) \quad cos\frac{\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 8\pi.$$

Zadanie 19.13 *Oblicz okres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{2\pi x}{3}$$
$$(ii) \quad cos\frac{2\pi x}{3}$$

Zadanie 19.14 *Podaj wykres funkcji*

$$(i) \quad sin\frac{2\pi x}{3}, \quad -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$
$$(ii) \quad cos\frac{2\pi x}{3}, \quad 0 \leq x \leq 3\pi.$$

Zadanie 19.15 *Oblicz okres funkcji*

$$(i) \quad tg\frac{\pi x}{4}$$
$$(ii) \quad ctg\frac{\pi x}{4}$$

Zadanie 19.16 *Podaj wykres funkcji*

$$(i) \quad tg\frac{\pi x}{4}, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$$
$$(ii) \quad ctg\frac{\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 4\pi.$$

19.3.3 Wykresy funkcji trygonometrycznych

Funkcje trygonometryczne sinus i cosinus określone są na całej osi liczbowej, dla wszystkich wartości rzeczywistych $x \in (-\infty, \infty)$. Również są funkcjami periodycznymi o tym samym okresie $\omega = 2\pi$.

To znaczy, że te funkcje spełniają tożsamość [4]

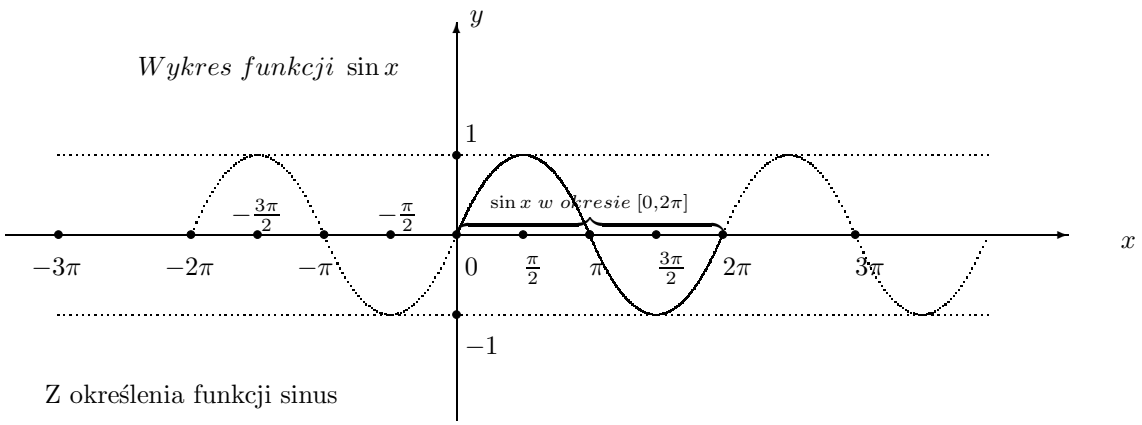
$$f(x + 2\pi)\sin(x + 2\pi) = \sin\ x) = f(x),$$

$$g(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi)cos\ x = g(x)$$

dla każdego $x \in (-\infty, \infty)$.

[4]Tożsamość to znaczy, że zachodzi równość pomiędzy lewą i prawą stroną równania dla wszytstkich wartości zmiennej x.

Wykreślając funkcje trygonometryczne argument odkładamy na osi x, jak na rysunku.



Z określenia funkcji sinus

$$|\sin x| = |\frac{y_1}{R}| \leq 1, \quad \text{gdyz} \quad R \geq |y_1|, \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty.$$

Wartości funkcji sinus nie przekraczają przedziału $[-1, 1]$. To znaczy, że dla wszystkich wartości argumentu $-\infty < x < \infty$ spełniona jest nierówność

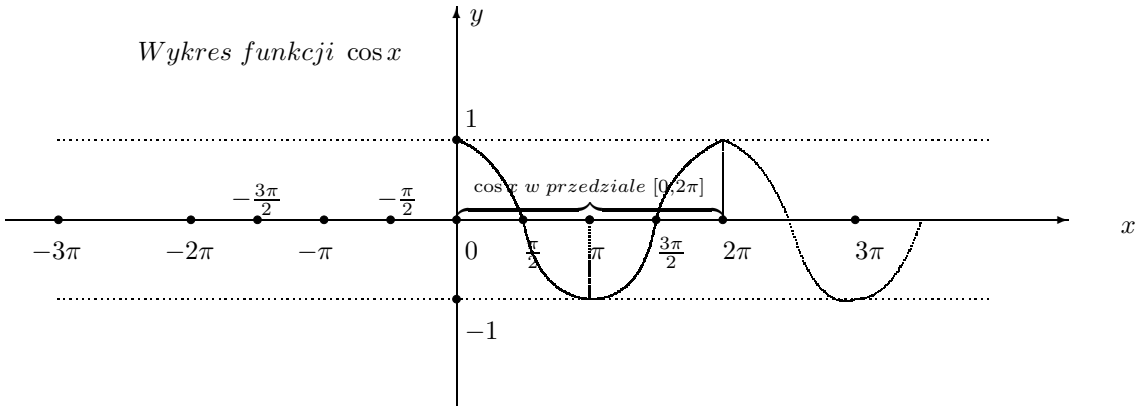
$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

Istotnie, z określenia funkcji sinus

$$|\sin x| = |\frac{y_1}{R}| \leq 1, \quad \text{gdyz} \quad R \geq |y_1|, \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty.$$

Podobnie, funkcja cosinus jest periodyczna o okresie 2π i określona dla wszystkich rzeczywistych wartości kąta $-\infty < x < \infty$. Jej warotości nie przekraczają przedziału $[-1.1]$, gdyż z okresślenia funkcji cosinusa

$$|\cos x| = |\frac{x_1}{R}| \leq 1, \qquad \text{gdyz} \quad R \geq |x_1|, \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty.$$

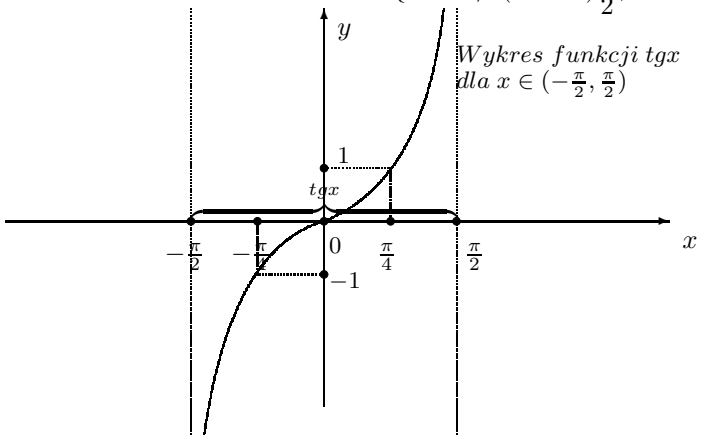


Funkcje trygonometryczne tangens i cotangens są periodyczne o okresie $\omega = \pi$. Istotnie, kąt $x + \pi$ leży w trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego. Z tabeli odczytujeme wartość $\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}x$. Zatem, prawdziwa jest następująca tożsamość:

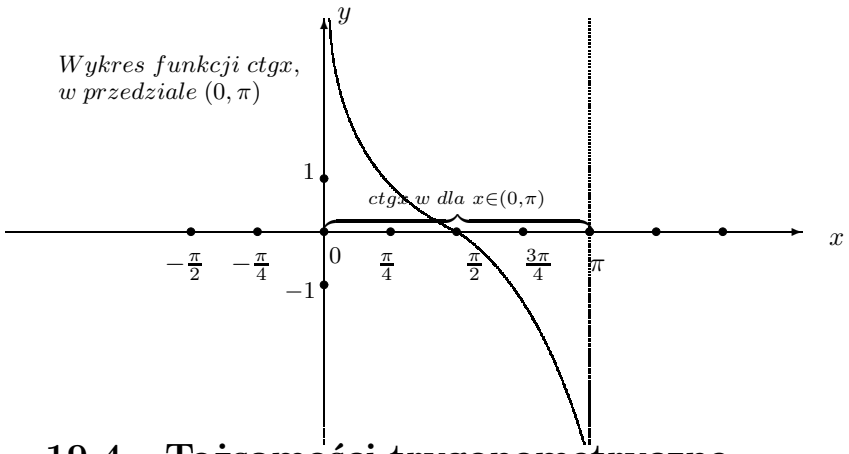
$$f(x + \pi) = \mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}x = f(x),$$

dla każdego argumentu w dziedzinie funkcji tangens

$$x \in D = \{x \ : x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 1 \pm 2, ...; \}.$$



Wykres funkcji cotangens dla $x \neq k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$



19.4 Tożsamości trygonometryczne

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość, która jest prawdziwa dla wszystkich wartości kątów w dziedzinie tożsamości. W odróżnieniu od tożsamości, równanie trygonometryczne jest spełnione tylko dla niektórych wartości kątów z dziedziny równania.
Podobnie, wzory trygonometryczne są tożsamościami dla wszystkich wartości kątów z dziedziny ich określenia.

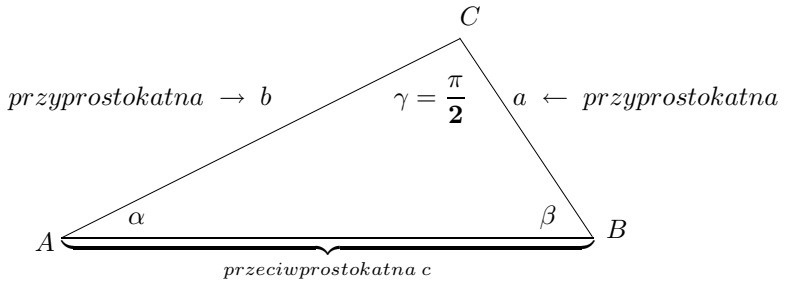
19.4.1 Jedynka trygonometryczna

Jedynka trygonometryczna to jest tożsamość

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

dla wszystkich wartości rzeczywistych kąta $\alpha \in (-\infty, \infty)$.
Wprost z definicji funkcji sinus i cosinus obliczamy przyprostokątne a i b trójkąta prostokątnego $\triangle ABC$

$$a = c \sin\ \alpha, \quad b = c \cos\ \alpha.$$



Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że suma kwadratów przyprostokątnych równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

$$Po\ podstawieniu\ \ a = c * sin\ \alpha, \quad b = c * cos\ \alpha\ \ otrzymamy$$

$$(c \sin\ \alpha)^2 + (c \cos\ \alpha)^2 = c^2,$$

$$c^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = c^2 \ \ | : c^2,$$

Skąd wynika tozsamość

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

dla każdej wartości $\alpha \in (-\infty, \infty)$. To jest jedynka trygonometryczna.

Z jedynki trygonometrycznej wynikają następujące tożsamości:

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = csc^2\alpha, \qquad \alpha \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,\ \pm 3, ...;$$

Istotnie, z definicji funkcji tangens wynika równość

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{cos^2\ \alpha + sin^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} = \mathrm{csc}^2\alpha.$$

dla każdego kąta $\alpha \neq (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,\ \pm 3, ...;$ dla którego

$$cos\ \alpha \neq 0.$$

[5]

Podobnie z defincji funkcji cotangens wynika równość

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{sin^2\alpha + cos^2\alpha}{sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \sec^2\alpha.$$

dla każdego kąta $\alpha \neq k * \pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,\ \pm 3, ...;$ dla którego

$$sin\ \alpha \neq 0.$$

To znaczy dla kąta α ze zbioru określoności funkcji cotangens. [6]

[5] Nieparzystą wielokrotność kąta prostego piszemy $(2\pi + 1)\frac{\pi}{2}, \ \ k =, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

[6] Parzystą wielokrotność kąta prostego piszemy $2k * \frac{\pi}{2} = k\pi, \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

19.4.2 Zadania

Zadanie 19.17 *Sprawdź tożsamowść*

$$sin^4x - cos^4x = 1 - 2cos^2x \qquad \infty < x < \infty.$$

Zadanie 19.18 *Sprawdź tożsamowść*

$$(1 + tg^2x)cos^2x = 1 \qquad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, ...;$$

Zadanie 19.19 *Sprawdź tożsamowść*

$$\frac{1 + tg^2x}{1 + ctg^2x} = tg^2x \qquad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, ...;$$

Zadanie 19.20 *Wykaż, ze*

$$sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha + \beta) = 2sin\ \alpha\ cos\beta$$

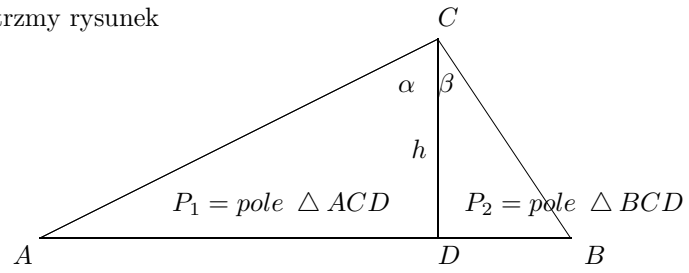
dla każdej rzeczyczywistej wrtości kątów α *i* β*.*

19.4.3 Funkcje sinus i cosinus sumy i różnicy kątów $\alpha,\ \beta$

Niżej wyprowadzimy wzory na sumę i różnię dwóch kątów

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin\ \alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\ \alpha, \\
\sin(\alpha - \beta) &= \sin\ \alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \cos\ \alpha, \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\ \alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \sin\ \alpha, \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos\ \alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \sin\ \alpha,
\end{aligned} \tag{19.2}$$

Rozpatrzmy rysunek



Wysokość h *trójkąta* $\triangle ABC$

Zauważamy, że

$$\begin{aligned}
\sin\ \alpha &= \frac{|AD|}{|AC|}, \quad & \sin\beta &= \frac{|DB|}{|BC|}, \\
\cos\ \alpha &= \frac{h}{|AC|}, \quad & \cos\beta &= \frac{h}{|BC|}, \\
h &= |AC|\cos\ \alpha, \quad & h &= |BC|\cos\beta
\end{aligned}$$

Pole P trójkąta $\triangle ABC$ jest sumą pola P_1 trójkąta $\triangle ADC$ i pola P_2 trójkąta $\triangle DBC$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2}|AC|\ |BC|\sin((\alpha + \beta) \tag{19.3}$$

Z drugiej strony, wiemy, że

$$P_1 = \frac{1}{2}|AC|\ h\ \sin\ \alpha, \qquad P_2 = \frac{1}{2}|BC|\ h\ \sin\beta, \tag{19.4}$$

Porównując pola określone przez równości (19.3) i (19.4) otrzymamy wzór na sinus sumy dwóch kątów α i β

$$\frac{1}{2}|AC|\ |BC|\sin((\alpha+\beta) = \frac{1}{2}|AC|\ h\ \sin\ \alpha + \frac{1}{2}|BC|\ h\ \sin\beta,$$
$$|AC|\ |BC|\sin(\alpha+\beta) = |AC|\ |BC|\ \cos\beta\ \sin\ \alpha + |AC|\ |BC|\ \cos\ \alpha,$$

Skad sinus sumy

$$\sin(\alpha+\beta) = \underbrace{\sin\ \alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\ \alpha}_{sin\ (\alpha+\beta)},$$

Pozostałe wzory wyprowadzamy korzystając ze wzorów redukcyjnych.

$$\begin{aligned}\sin((\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) &= \sin\ \alpha\ \cos(-\beta) + \sin(-\beta)\ \cos\ \alpha \\ &= \underbrace{\sin\ \alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \cos\ \alpha}_{sin\ (\alpha-\beta)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}cos(\alpha+\beta) = \sin(90^o-(\alpha+\beta)) &= sin((90^o-\alpha)-\beta) \\ &= \sin(90^o-\alpha)\cos\beta - \sin\beta cos(90^o-\alpha) \\ &= \underbrace{cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta}_{cos\ (alpha+\beta)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) = sin(90^o-(\alpha-\beta)) &= \sin((90^o-\alpha)+\beta) \\ &= sin(90^o-\alpha)cos\beta + sin\beta cos(90^o-\alpha), \\ &= \underbrace{cos\alpha cos\beta + sin\ \alpha sin\beta}_{cos\ (\alpha-\beta)}.\end{aligned}$$

Wzory na tangens i cotangens sumy i różnicy dwóch kątów wynikają bezpośrednio z powyżych wzorów

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\ \alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\ \alpha}{\cos\ \alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \sin\ \alpha} = \underbrace{\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}}_{tg\ (\alpha+\beta)}$$

$$dla \quad \alpha+\beta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\ \alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \sin\ \alpha}{\sin\ \alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\ \alpha} = \underbrace{\frac{\mathrm{ctg}\alpha\ \mathrm{ctg}\beta - 1}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}}_{ctg\ (\alpha+\beta)}$$

$$dla \quad \alpha+\beta \neq k\,\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$$

Podobnie wyprowadzamy wzory na tangens i cotangens różnicy dwóch kątów.

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\ \alpha\ \cos\beta-\sin\beta\ \cos\ \alpha}{\cos\ \alpha\ \cos\beta+\sin\beta\ \sin\ \alpha}=\underbrace{\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}}_{tg\ (\alpha-\beta)}$$

$$dla\quad \alpha-\beta\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,....;$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\ \alpha\ \cos\beta+\sin\beta\ \sin\ \alpha}{\sin\ \alpha\ \cos\beta-\sin\beta\ \cos\ \alpha}=\underbrace{\frac{\mathrm{ctg}\alpha\ \mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}}_{ctg\ (\alpha-\beta)}$$

$$dla\quad \alpha-\beta\neq k\,\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,....;$$

19.4.4 Wzory kąta podwójonego

Wzory kąta podwójnego wynikają bezpośrednio z powyższych wzorów na sumę. Mianowicie, dla $\alpha=\beta$

$$\sin 2\alpha=2\sin\ \alpha\ \cos\ \alpha,\quad dla\quad \alpha\in(-\infty,\infty)$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad dla\quad \alpha\in(-\infty,\infty)$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha},\quad dla\quad \alpha\neq(2k+1)\,\frac{\pi}{4},\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}^2\alpha},\quad dla\quad \alpha\neq k\,\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

19.4.5 Wzory kąta połówkowego

Wzory kąta połówkowego otrzymujemy przez podstawienie do powyższych wzorów zamiast α połowę kąta $\frac{1}{2}\alpha$, wtedy otrzymamy

$$\sin\ \alpha=2\sin\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\alpha,\qquad \alpha\in(-\infty,\infty),$$

$$\cos\ \alpha=\cos^2\frac{1}{2}\alpha-\sin^2\frac{1}{2}\alpha,\quad \cos\ \alpha=1-2\sin^2\frac{1}{2}\alpha,\quad \cos\ \alpha=2\cos^2\frac{1}{2}\alpha-1$$
$$\alpha\in(-\infty,\infty),$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}\quad dla\quad \alpha\neq(2k+1)\,\frac{\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\frac{1}{2}\alpha-1}{2\mathrm{ctg}^2\frac{1}{2}\alpha},\quad dla\quad \alpha\neq k\,\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...;$$

19.4.6 Funkcje trygonometryczne połowy kąta

Z powyższych wzorów kąta połówkowego bezpośrednio wynikają wzory połowy kąta. Mianowicie, obliczając cosinus i sinus ze wzorów

$$\cos\ \alpha=2\cos^2\frac{1}{2}\alpha-1,\quad \cos\ \alpha=1-2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$$

otrzymamy wzóry cosinusa i sinusa na połowę kąta α

$$|\cos\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1+\cos\ \alpha}{2}}, \quad |\sin\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos\ \alpha}{2}}$$

dla $\alpha \in (-\infty, \infty)$.

Wzory połowy kąta dla tangensa i cotangensa wynikają bezpośrednio z defincji tych funkcji i wzorów dla sinusa i cosinusa

$$|\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha| = |\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}| = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\ \alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\ \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}}$$

dla $\alpha \neq (2k+1)\,\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$

Cotangens jest odwrotnością tangensa, zatem

$$\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\ \alpha}{1-\cos\ \alpha}}$$

dla $\alpha \neq 2k\,\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;$

19.4.7 Wyrażenie funkcji trygonometrycznych przez $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha$

Oznaczmy przez

$$t = \mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha \quad dla \quad \alpha \neq (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...;\,.$$

Wtedy funkcje trygonometryczne kąta α można zapisać w postaci następujących wymierażeń wymiernych zmiennej t.

$$\sin\ \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos\ \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty,$$
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t \neq -1, 1, \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-t^2}{2t} \qquad t \neq 0.$$

Istotnie, wiemy, że

$$\begin{aligned}
\sin\ \alpha &= 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\ \cos\tfrac{1}{2}\alpha \\
&= \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha + \cos^2\frac{1}{2}\alpha} \\
&= \frac{\frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}}{\frac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha + \cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}} = \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

Podobnie funkcja cosinus

$$\begin{aligned}\cos\ \alpha &= \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha \\ &= \frac{\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos^2\tfrac{1}{2} + \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha} \\ &= \frac{\dfrac{\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}}{\dfrac{\cos^2\tfrac{1}{2} + \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Dla funkcji tangens i cotangens wzory płowy kąta wynikają wprost z ich definicji i wyżej podanych wzorów dla funkcji sinus i cosinus

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t \neq -1, 1$$

Cotanges jest odwrotnością tangnsa. Zatem wzór dla cotangensa

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-t^2}{2t}, \quad t \neq 0.$$

19.4.8 Suma i różnica funkcji trygonometrycznych

Niżej podajemy następujące wzory na sumę i ró znicę funkcji trygonometrycznych

$$\begin{aligned}&\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}, \\ &\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}, \\ &\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}, \\ &\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}, \\ &\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{sin(\alpha+\beta)}{\cos\ \alpha\cos\beta} \\ &\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \frac{sin(\alpha-\beta)}{\cos\ \alpha\cos\beta} \\ &\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = \frac{sin(\alpha+\beta)}{\sin\ \alpha\sin\beta} \\ &\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta = \frac{sin(\alpha-\beta)}{\sin\ \alpha\sin\beta}\end{aligned} \tag{19.5}$$

Powyższe wzory wynikają ze wzorów (19.4) sinusa i cosinusa sumy i różnicy kątów. Mianowicie, wprowadzamy nowe zmienne

$$\alpha = x + y, \quad \beta = x - y, \quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

Korzystając ze wzorów (19.4) na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów zauważamy, że

$$\begin{aligned}
\sin\ \alpha+\sin\beta &= \sin(x+y)+\sin(x-y)\\
&= (\sin x\cos y+\sin y\cos x)+(\sin x\cos y-\sin y\cos x)\\
&= 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\\
\sin\ \alpha-\sin\beta &= \sin(x+y)-\sin(x-y)\\
&= (\sin x\cos y+\sin y\cos x)-(\sin x\cos y-\sin y\cos x)\\
&= 2\sin y\cos x = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\ \alpha+\cos\beta &= \cos(x+y)+\cos(x-y)\\
&= (\cos x\cos y-\sin x\sin y)+(\cos x\cos y+\sin x\sin y)\\
&= 2\cos x\cos y = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}.\\
\cos\ \alpha-\cos\beta &= \cos(x+y)-\cos(x-y)\\
&= (\cos x\cos y-\sin x\sin y)-(\cos x\cos y+\sin x\sin y)\\
&= -2\sin x\sin y = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

Wzory sumy i różnicy tangensa i cotangensa wynikają wprost z definicji powyższych wzorów dla sinusa cosinusa.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta &= \frac{\sin\alpha}{\cos\ \alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta},\\
&= \frac{\sin\ \alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\ \alpha}{\cos\ \alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\ \alpha\cos\beta}\\
\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta &= \frac{\sin\alpha}{\cos\ \alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta},\\
&= \frac{\sin\ \alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\ \alpha}{\cos\ \alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\ \alpha\cos\beta}
\end{aligned}\tag{19.6}$$

Podobnie wprowadzamy wzór dla sumy i różnicy cotangensów

$$\begin{aligned}
\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta &= \frac{sin(\alpha+\beta)}{\sin\ \alpha\sin\beta}\\
\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta &= \frac{sin(\alpha-\beta)}{\sin\ \alpha\sin\beta}
\end{aligned}$$

19.5 Równania trygonometryczne

Zacznijmy od najprostrzych równań trygonometrycznych, rozwiązania których są częścią rozwiązań bardziej złożonych równań.

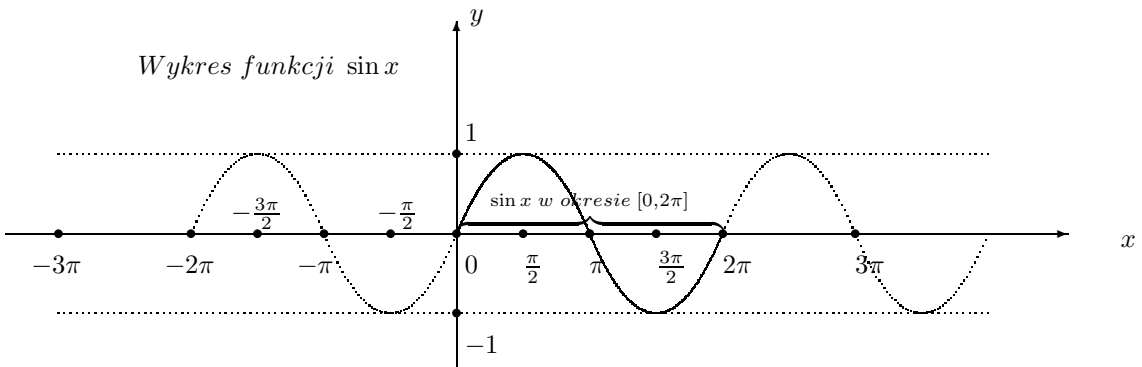
Przykład 19.3 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$(i)\quad \sin x=0,\qquad (ii)\quad |\sin x|=1.$$

Rozwiązanie (i). Głównymi pierwiastami tego równania, to znaczy, że zerami funkcji sinus w jej okresie od 0 do 360^o lub w mierze łukowej w zakresie od $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ są rozwiązania

$$x = 0, \quad \text{lub} \quad x = \pi.$$

To rozwiązanie jest zaznaczo na wykresie funkcji $y = \sin x$.



Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji sinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi,$$

dla parzystych i dla nieparzystych k. To znaczy, że wszystkie rozwiązania są wielokrotnością liczby π,

$$x_k = k\,\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie (ii). Głównymi pierwiastkami równania

$$|\sin x| = 1, \quad \text{lub} \quad \sin x = 1 \quad \text{lub} \quad \sin x = -1.$$

są liczby

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji sinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{3\pi}{2} + \pi + 2k\pi$$

dla parzystych i dla nieparzystych k. To znaczy, że wszystkie rozwiązania są następującej postaci:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

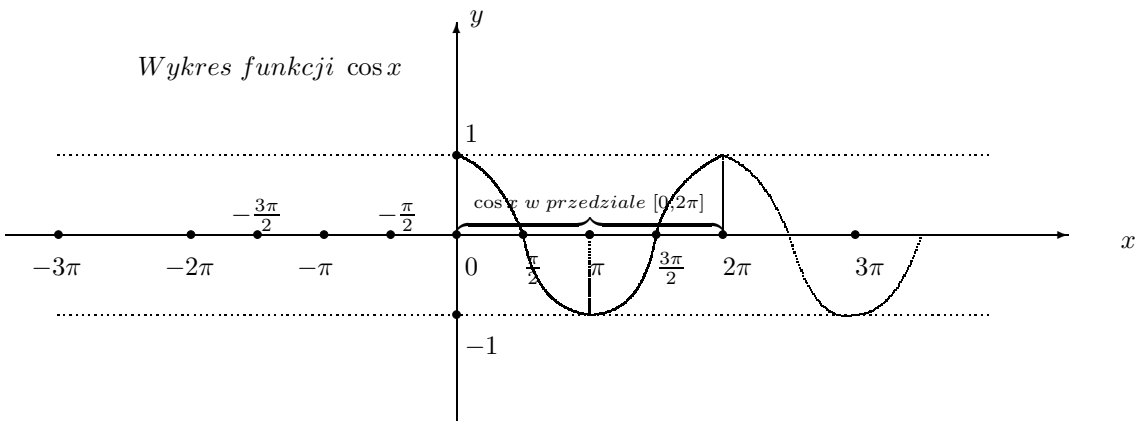
Przykład 19.4 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$(i) \quad \cos x = 0, \quad (ii) \quad |\cos x| = 1.$$

Rozwiązanie (i). Głównymi pierwiastami tego równania, to znaczy, że zerami funkcji cosinus w jej okresie od 0 do 360^o lub w mierze łukowej w zakresie od $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ są rozwiązania

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

To rozwiąnie jest zaznaczone na wykresie funkcji $y = \cos x$.



Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji cosinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

To znaczy, że wszystkie rozwiązania są następującej postaci:

$$x_k = (2k+1)\,\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie (ii). Głównymi pierwiastkami równania

$$|\cos x| = 1, \quad \text{lub} \quad \cos x = 1 \quad \text{lub} \quad \cos x = -1.$$

są liczby

$$x = 0, \quad \text{lub} \quad x = \pi.$$

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji cosinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi,$$

To znaczy, że wszystkie rozwiązania dla parzystych i nieparzystych k, są następującej postaci:

$$x_k = k\,\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Zauważmy, że sinus i cosinus kątów $\alpha_k = k\pi$ lub $\alpha_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ możemy napisać w następuję postaci potęgi minus jedynki:

$$\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k, \quad \cos k\pi = (-1)^k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... :$$

Przykład 19.5 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

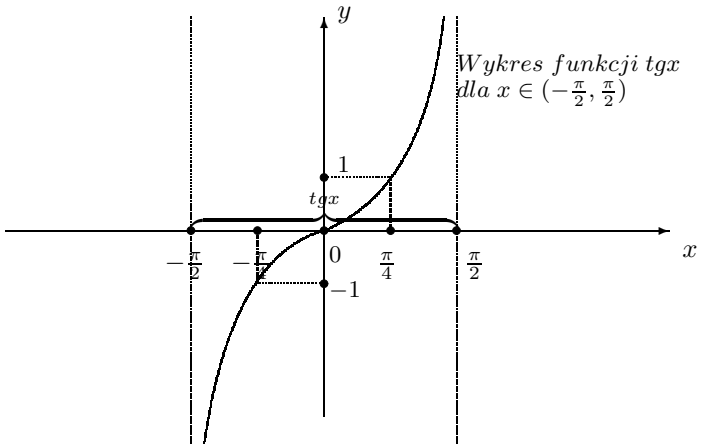
$$(i) \quad \text{tg}x = 0, \quad (ii) \quad |\text{tg}x| = 1.$$

$$(iii) \quad \text{ctg}x = 0, \quad (iv) \quad \text{ctg}x| = 1.$$

Rozwiązanie (i). Ponieważ okresem funkcji tangens jest liczab π, to głównym pierwiastkiem równania

$$\text{tg } x = 0,$$

jest $x = 0$. Wtedy również $\sin x = 0$.



Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji tangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie (ii). W zakresie okresu funkcji tangens od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$ są dwa pierwiastki główne równania

$$|\text{tg}|\, x = 1, \quad \text{lub} \quad \text{tg } x = 1, \quad \text{tg } x = -1.$$

$x_1 = -\frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$.

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji tangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

lub zapisane w postaci jednego wzoru

$$x_k = (2k+1)\frac{\pi}{4}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

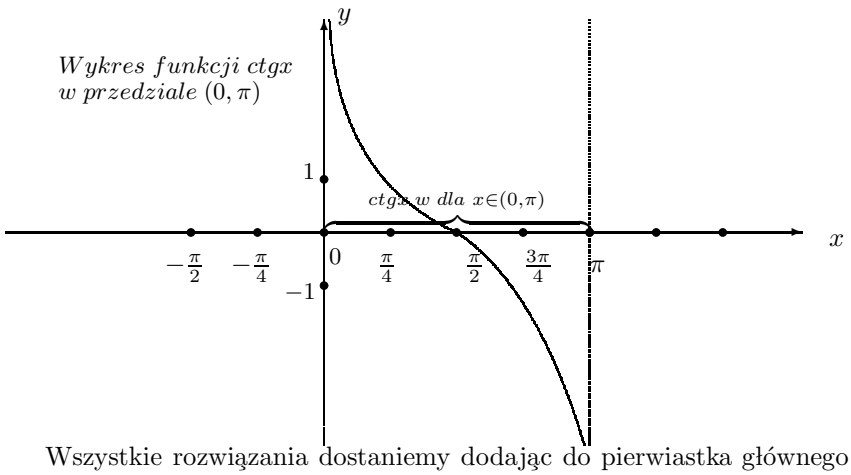
Rozwiązanie (iii). Zauważmy, że $x = \frac{\pi}{2}$ jest pierwiastkiem głównym równania

$$\text{ctg } x = 0,$$

Ten pierwiastek główny zaznaczony został na wykresie funkcji

$$y = ctg\ x$$

w przediale $(0, \pi)$



Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji cotangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie (iv). Głównymi pierwiastkami równania

$$|\mathrm{ctg}x| = 1,$$

lub równań równoważnych

$$ctg\ \ x = 1, \quad i \quad \mathrm{ctg}x = -1.$$

są liczby rzeczywiste

$$x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji cotangens.
Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi = (4k+1)\frac{\pi}{4},$$

lub

$$x_k = \frac{3\pi}{4} + k\pi = (4k+3)\frac{\pi}{4}$$

$$dla\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Sprawdzenie. Podatawiając do równiania $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x_k = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ otrzymamy

$$ctg\ x_k = ctg(\frac{\pi}{4} + k\pi) = ctg\ \frac{\pi}{4} = 1, \qquad k = 0,\ \pm 1, \pm 2,\ \pm 3, ...;$$

$$ctg\ x_k = ctg(\frac{3\pi}{4} + k\pi) = ctg\ \frac{3\pi}{4} = -1, \qquad k = 0,\ \pm 1, \pm 2,\ \pm 3, ...;$$

Niżej w tablicy podane są wartości funkcji trygonometrycznych kątów wybranych.

α	$\sin\ \alpha$	$\cos\ \alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
$\alpha = 0$	0	1	0	∞
$\alpha = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\alpha = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\alpha = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\alpha = \frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
$\alpha = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\alpha = \pi$	0	-1	0	$-\infty$
$\alpha = \frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\alpha = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
$\alpha = \frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\alpha = 2\pi$	0	1	0	∞

Przykład 19.6 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$\sin x - \cos x = 0.$$

Rozwiązanie. W pierwszej kolejności zauważmy, że dziedziną $D = R$ wyrażenia trygonometrycznego w równaniu jest ziór R wszystkich liczb rzeczywisych.
Z tablicy odczytujemy pierwiastki równania w przedziale $0 \leq x \leq 2\pi$ okresu $\omega = 2\pi$ funkcji sinus i cosinus

$$\sin x = \cos x.$$

Zatem widzimy, że sinus równy jest cosinus dla kątów $x = \frac{\pi}{4}$ oraz $x = \frac{5\pi}{4}$, które leżą w pierwszej lub trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego.
Wszystkie rozwiązania dostajemy dodając okres $\omega = 2\pi$ do tych rozwiązanń

$$x_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Rozwiązanie tego równania znajdziemy innym sposobem rozkładając wyrażenie trygonometryczne na czynniki. Mianowicie, lewą stronę równiania zapiszmy w postaci

$$\sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 0.$$

Stosując wzór na różnicę sinusów, otrzymamy iloczn

$$\begin{aligned} \sin x - \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) &= 2\sin\frac{(\frac{\pi}{2} - x) - x}{2}\cos(\frac{\frac{\pi}{2} - x) + x}{2} \\ &= 2\cos\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4} - x) \\ &= \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 0. \end{aligned}$$

Skąd pierwiastki główne w przedziale $[0, 2\pi]$ okresu funkcji sinus

$$\frac{\pi}{4} - x = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{\pi}{4} - x = \pi$$

Dodają okres $\omega = 2\pi$ funkcji sinus, otrzymamy wszystkie rozwiązania

$$x_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{\pi}{4} + (2k-1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Przykład 19.7 *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = 2.$$

Rozwiązanie. Z tablicy wartości funkcji tangens i cotangens, widzimy, że suma tangensa i cotangensa kąta x jest równa 2, jeżeli $\mathrm{tg}x = 1$ i $\mathrm{ctg}x = 1$ dla $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{5\pi}{4}$. Wszystkie rozwiązania otrzymamy dodając do głównych pierwiastków wielokrotność ich okresu.
To znaczy

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1 \pm 2, ...;$$

Te same rozwiązania otrzymamy innym sposobem. Mianowicie, napiszmy to równanie w postaci ekwiwalętnej

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2.$$

Zauważmy, że dziedziną wyrażenia trygonometrycznego w tym równaniu jest zbiór liczb rzeczywistych $x \in R$ dla których $sin\ x \neq 0$ i $cos\ x \neq 0$

$$D = \{x \in R : \quad x \neq \frac{k\,\pi}{2}, \}$$

dla całkowitych liczb $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$
Przekształcamy to równanie korzystając z jedynki trygonometrycznej i z sinusa podwojonego kąta

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x\ \cos x} = \frac{1}{\sin x\ \cos x} = 2$$

Skąd wynika równanie

$$2\sin x\ \cos x = 1, \quad \text{lub} \quad \sin 2x = 1.$$

Z tablicy wartości funkcji trygonometrycznych pamiętamy, że $\sin 2x = 1$ dla pierwiastka $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{5\pi}{4}$ w kole trygonometrycznym. Dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu $\omega = \pi$ funkcji $\sin 2x$ otrzymamy wszystkie rozwiązania tego równania.

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Zauważmy, że powyższe pierwiastki równania są takie same jak w pierwszym sposobie rozwiązania i należą do dziedziny równania.

Przykład 19.8 *Rozwiąż równanie*

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Rozwiązanie. Tej postaci równia rozwiązujemy przez podstawienie nowej niewiadomej $t = \sin x$, żeby otrzymać równanie kwadratowe

$$2t^2 - 3t + 1 = 0.$$

Wyóżnik tego r'ownania $\Delta = (-3)^2 - 4 * 2 * 1 = 1$. Zatem rozwiązania

$$t_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{3+1}{4} = 1.$$

Wracając do niewiadomej x, znajdujemy wszystkie rozwiązania

$$\sin x = \tfrac{1}{2}, \quad x_k = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

lub

$$\sin x = 1, \quad x_k = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

dla całkowitych $k = 0, \pm 1, \pm 2...;$

Zadanie 19.21 *Rozwiąż równanie*

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Jednym ze skutecznych sposobów rozwiązywania równań trygonometrycznych jest rozkład na czynniki wyrażenia trygonometrycznego. Niżej podajemy przykład takiego sposobu.

Przykład 19.9 *Rozwiąż równanie*

$$\cos x + 3\cos 3x + \cos 5x = 0.$$

Rozwiązanie. Zastosujmy wzór do nawiasu na suma cosinusów

$$\begin{aligned}(\cos x + \cos 5x) + \cos 3x &= 2\cos\frac{x+5x}{2}\cos\frac{x-2x}{2} + \cos 3x \\ &= 2\cos 3x\ \cos(-2x) + \cos 3x \\ &= \cos 3x(2\cos 2x + 1) = 0.\end{aligned}$$

Zatem, wyrażenie trygonometryczne rozłożyliśmy na dwa czynniki, które przyrównujemy do zera

$$\cos 3x = 0, \quad \text{i} \quad 2\cos 2x + 1 = 0, \quad \cos x - \frac{1}{2}.$$

Rozwiązując powyżesze proste równania, otrzymamy następujące serie rozwiązań: Gdy

$$\cos 3x = 0,$$

to rozwiązanie

$$\begin{aligned}3x &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x_k = \frac{1}{6}\pi + +\frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...; \\ 3x &= \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad x_k = \frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\end{aligned}$$

oraz gdy $\cos 3x = -\frac{1}{2}$, to rozwiązanie

$$\begin{aligned}3x &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x_k = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...; \\ 3x &= \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \quad x_k = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\end{aligned}$$

Przykład 19.10 *Rozwiąż równanie*

$$\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0.$$

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $t = \sin x$. Wtedy dostajemy równanie kwadratowe dla niewiadomej t

$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

którego rozwiązanie jest $t_1 = -3$ i $t_2 = 1$. Ponieważ $-1 \leq \sin x \leq 1$, dlatego $t = -3$ należy udrzucić. Pozostaje wartość $t = 1$. Dla tej wartości

$$\sin x = 1, \quad \text{gdy} \quad x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

19.5.1 Zadania

Zadanie 19.22 *Rozwiąż równanie*

$$(i) \quad sin\frac{\pi x}{2} = 0, \quad (ii) \quad cos\frac{\pi x}{2} = 0.$$

Zadanie 19.23 *Rozwiąż równanie*

$$(i) \quad tg\frac{\pi x}{2} = 0, \quad (ii) \quad ctg\frac{\pi x}{2} = 0.$$

Zadanie 19.24 *Rozwiąż równanie*

$$(i) \quad sin\ x + cos\ x = 0, \quad (ii) \quad sinx = cos\ x.$$

Zadanie 19.25 *Rozwiąż równanie*

$$(i) \quad tg\ x - ctg\ x = 0 \quad (ii) \quad tg\ x = sin\ x.$$

Zadanie 19.26 *Rozwiąż równanie*

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0.$$

Zadanie 19.27 *Rozwiąż równanie*

$$2\sin^3 x - \sin^2 x - 2sinx + 1 = 0.$$

Zadanie 19.28 *Rozwiąż równanie*

$$tg^3x + 3tg^2x - 3tg\ x = 1.$$

19.6 Nierówności trygonometryczne

Podobnie jak równania trygonometryczne, rozwiązujemy nierówności trygonometryczne korzystając z wzorów redukcyjnych, wzorów sumy i różnicy funkcji trygonometrycznych.

19.6.1 Nierówności podstawowe dla funkcji sinus

Przykład 19.11 *Rozwiąż nierównówność w przedziala* $[0, 2\pi]$.

$$(i) \quad \sin x \leq \frac{1}{2}, \quad (ii) \quad sinx > \frac{1}{2}.$$

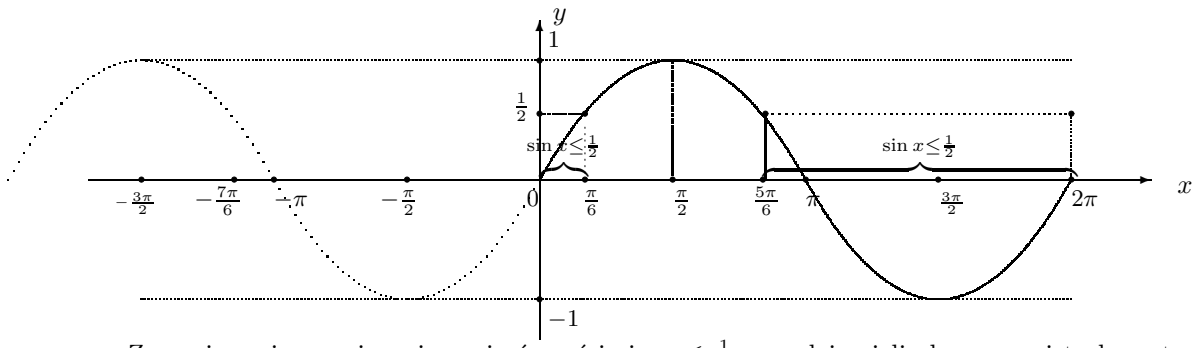
Rozwiązanie (i). Funkcja sinus osiąga wartość $\sin x = \frac{1}{2}$ dla kąta $x = \frac{\pi}{6}$ w pierwszej ćwiartce, lub dla kąta $x = \frac{5\pi}{6}$ w drugiej ćwiartce. Zatem nierówność jest prawdziwa przedziale $[0, 2\pi]$ dla

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

lub

$$\frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi.$$

Zobaczmy to rozwiązanie na wykresie funkcji sinus.

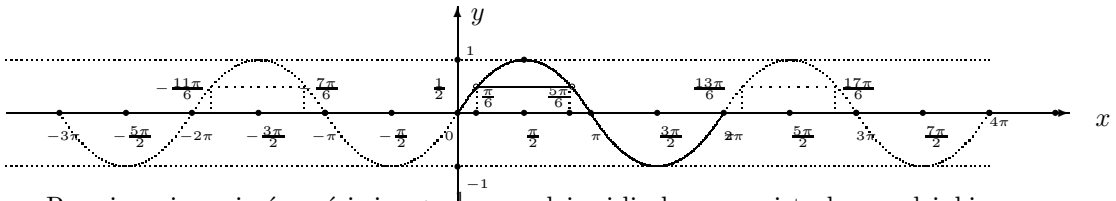


Zauważmy, że rozwiązaniem nierówności $\sin x \leq \frac{1}{2}$ na całej osi liczb rzeczywistych są te punkty $x \in R$, które należą do odcinków

$$x \in [a_k, b_k] = [\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi], \quad gdy \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \pm 3...;$$

gdzie $a_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad b_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$

(ii) Podobnie znajdujemy rozwiązanie nierówności przeciwnej sin $x > \frac{1}{2}$



Rozwiązaniem nierówności $\sin x > \frac{1}{2}$, na całej osi liczb rzeczywistych, są odcinki

$$[a_k, b_k] = [\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi], \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \pm 3...; \tag{19.7}$$

o początku w punkcie $a_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ i końcu w punkcie $b_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. [7]

19.6.2 Nierówności podstawowe dla funkcji cosinus

Przykład 19.12 *Rozwiąż nierówność*

$$(i) \quad cos\ x \leq \frac{1}{2},$$

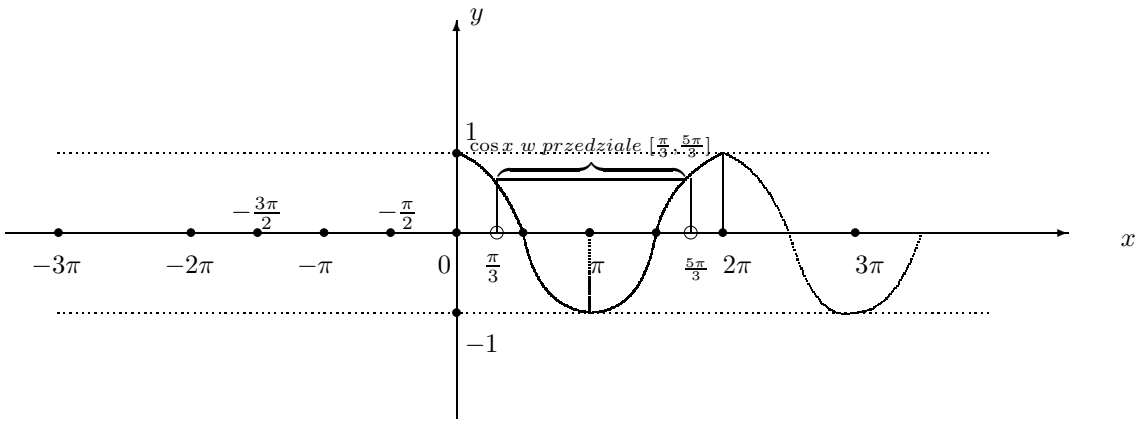
$$(ii) \quad cos\ x > \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie (i). Funkcja cosinus osiąga wartość $\cos x = \frac{1}{2}$ dla kąta $x = \frac{\pi}{3}$ w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego lub dla kąta $x = \frac{5\pi}{3}$ w czwartej ćwiartce koła trygonometrycznego. Zatem nierówność

$$cos\ x \leq \frac{1}{2}$$

[7] Tutaj indeks $k \in C = \{0, \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, ... :\}$ przebiega cały zbiór liczb całkowitych.

jest prawdziwa w przedziale $[0, 2\pi]$ dla wartości kąta $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$.
Zobaczmy to na wykresie funkcji $y = cos\ x$



Rozwiązaniem nierówności $\cos x \leq \frac{1}{2}$, na całej osi liczb rzeczywistych, są odcinki

$$[a_k, b_k] = [\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi], \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...; \tag{19.8}$$

o początku w punkcie $a_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ i końcu w punkcie $b_k = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi$.

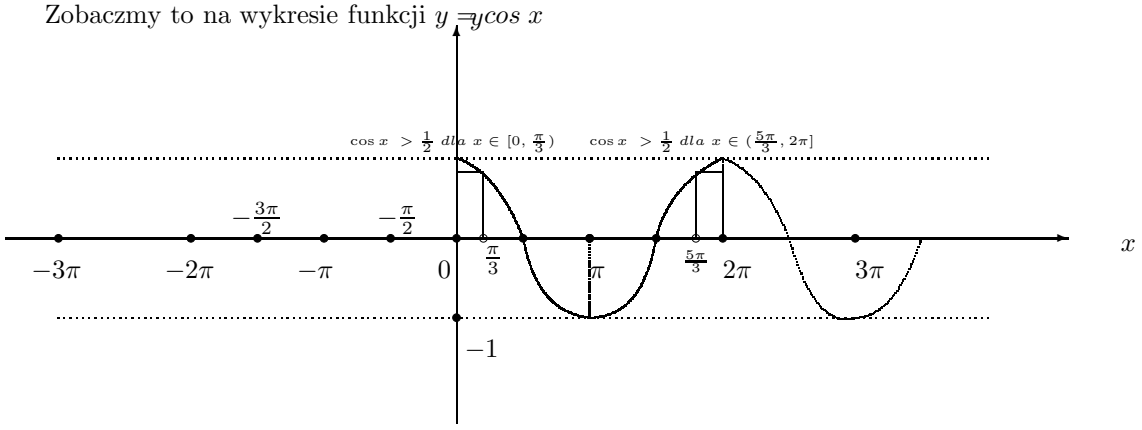
Rozwiązanie (ii). Funkcja cosinus osiąga wartość $\cos x = \frac{1}{2}$ dla kąta $x = \frac{\pi}{3}$ w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego lub dla kąta $x = \frac{5\pi}{3}$ w czwartej ćwiartce koła trygonometrycznego. Zatem nierówność

$$cos\ x > \frac{1}{2}$$

jest prawdziwa w przedziale $[0, 2\pi]$ dla wartości kąta

$$x \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$$

Zobaczmy to na wykresie funkcji $y = cos\ x$



Rozwiązaniem nierówności $\cos x > \frac{1}{2}$, na całej osi liczb rzeczywistych, są przedziały

$$[a_k, b_k] = [2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi], \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...;$$

o początku w punkcie $a_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ i końcu w punkcie $b_k = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$.
lub przedziały

$$[c_k, d_k] = (\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi], \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \pm 3...;$$

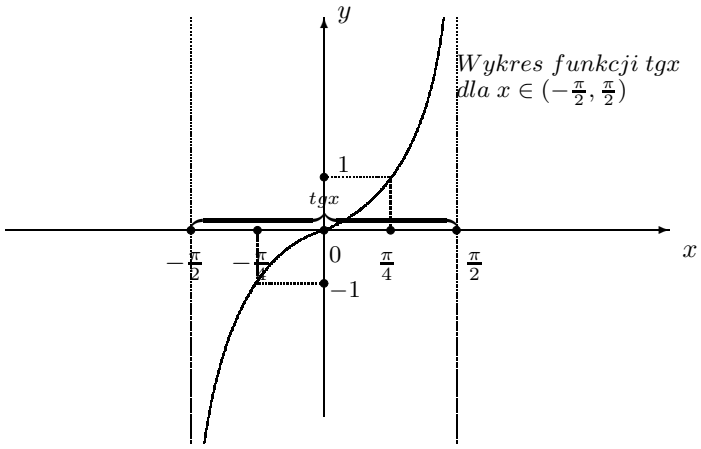
o początku w punkcie $c_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ i końcu w punkcie $d_k = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$. [8]

19.6.3 Nierówności podstawowe dla funkcji tangens i cotangens

Funkcja Tangens. Jak wiemy, funkcja tanges jest określona dla argumentu

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ k = 0, \pm 1, \ \pm 2, ...;$$

różnego od nieparzystej wielokrotności kąta prostego $\frac{\pi}{2}$.



Funkcja tangens jest rosnąca. To znaczy dla większych wartości argumentu x warotości funkcji tanges są większe, piszemy

jeżeli $x_1 < x_2$ to wartości $tg\ x_1 < tg\ x_2$. Funkcja tangens jest okresowa o kresie $\omega = \pi$, piszemy

$$tg\ x = tg(x + \pi) \quad dla\ kazdego\ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \ \ k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, ...;$$

Rozpatrzmy wykres funkcji tangens na całej osi liczbowej z wyjątkiem punktów

$$x_k \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad dla \qquad k = 0 \ \pm \ 1, \ \pm 2, \ \pm 3, ...;$$

w których watrość funkcji tangens jest nieokreślona.
Przesuwając wykres funkcji

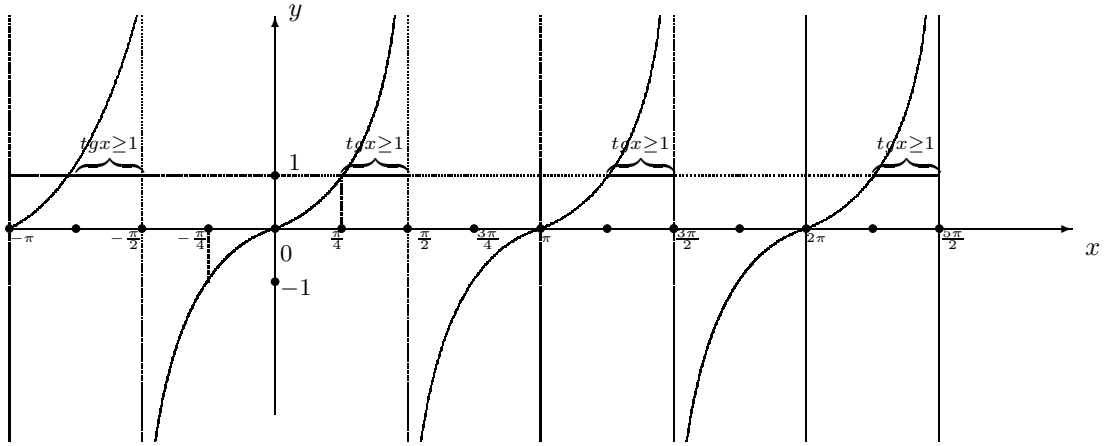
$$y = tg\ x \qquad dlax \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

o okres $\omega = \pi$ otzymamy wykesy funkcji tangens w kolejnych przedziałach określoności

$$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), \quad x \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}), \quad x \in (\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}), \ .....;$$

[8] Tutaj indeks $k \in C = \{0, \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, ... :\}$ przebiega cały zbiór liczb całkowitych.

Niżej na wykresie zaznaczone są wartości argumentu x funkcji tangens dla których wartości $tg\ x$ są większe lub równe jeden, to znaczy, że spełniona jest nierówność $tg\ x \geq 1$.



Przykład 19.13 .
(*i*) *Znajdź rozwiązanie nierówności*

$$tg\ x \geq 1$$

w przedziale otwartym $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
(*ii*) *Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności*

$$tg\ x \geq 1,$$

dla $x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, ...:$

Rozwiązanie(*i*). Funkcja $y = tg\ x$ jest rosnąca w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Wartość jeden funkcja tangens osiąga w punkcie $x = \frac{\pi}{4}$, toznaczy, że $tg\ \frac{\pi}{4} = 1$.
Zatem nierówność

$$tg\ x \geq 1$$

jest oprawdziwa w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dla $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.
Roozwiązanie (*ii*). Z wykresu funkcji $y = tg\ x$ widzimy, że w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$tg\ x < 1 \qquad dla\ \ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}).$$

Wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności $tg\ x < 1$ łatwo odczytamy z wykresu. Mianowicie wartość funkcji tangens jest mniejsza od jeden $tg\ x < 1$ dla wszystkich rzeczywistych wartości argumentu należących do przedziałów

$$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi), \qquad dla \quad k = 0, pm1,\ \pm 2, ...;$$

Zadanie 19.29 *Rozwiąż nierówność*

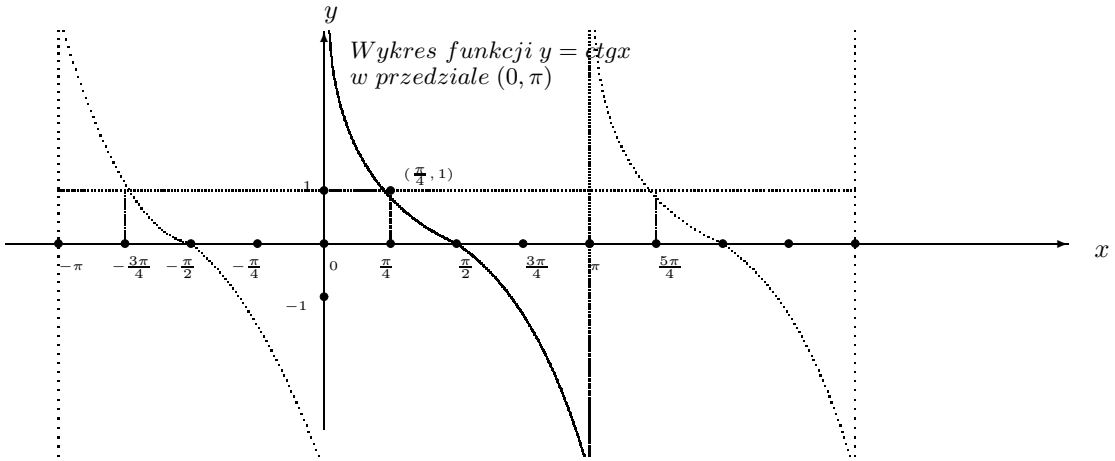
(*i*) $tg\ x \geq \sqrt{3}$, (*ii*) $tg\ x < \sqrt{3}$

dla wszystkich rzeczywistych wartosci $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1,\ \pm 2, ...;$

Funkcja cotangens. Jak wiemy, funkcja cotanges jest określona dla argumentu

$$x \neq k\pi, \ \ k = 0, \pm 1,\ \pm\ 2, ...;$$

różnego od wielokrotności kąta półpełnego π.



Funkcja cotangens jest malejąca i okresowa o okresie $\omega = \pi$. To znaczy dla większych wartości argumentu x warotości funkcji cotanges są mniejsze, piszemy

jeżeli $x_1 < x_2$ *to wartości* $ctg\ x_1 > ctg\ x_2$

Funkcja cotangens jest okresowa o okresie $\omega = \pi$, piszemy

$$ctg\ x = ctg(x + \pi) \quad dla\ kazdego\ x \neq k\pi, \ \ k = 0, \pm 1, \ \pm 2, ...;$$

Przykład 19.14 .

(*i*) *Znajdź rozwiązanie nierówności*

$$ctg\ x \geq 1$$

w przedziale otwartym $(0, \pi)$.

(*ii*) *Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności*

$$ctg\ x \geq 1,$$

$dla\ \ x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, ...:$

Rozwiązanie (*i*). Funkcja $y = ctg\ x$ jest malejąca w przedziale $(0, \pi)$. Watość $ctg\ x = 1$ osiąga dla $x = \frac{\pi}{4}$.
Zatem

$$ctg\ x \geq 1 \qquad dla\ x \in (0, \frac{\pi}{4}).$$

Rozwiązanie (*ii*) Z wykresu funkcji okresowej cotangens o okresie $\omega = \pi$ znajdujemy wszystkie przedziały

$$(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi), \quad dla \quad k = 0, \pm 1, \ \pm 2, ...;$$

w których nierówność $ctg\ x \geq 1$ jest prawdziwa.

Zadanie 19.30 .

(*i*) *Znajdź rozwiązanie nierówności*

$$ctg\ x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

w przedziale otwartym $(0, \pi)$.
(ii) *Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności*

$$ctg\ x > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

dla $x \in (0, \pi)$.

Zadanie 19.31 .
(i) *Znajdź rozwiązanie nierówności*

$$ctg\ x \geq \sqrt{3}$$

w przedziale otwartym $(0, \pi)$.
(ii) *Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności*

$$ctg\ x \geq \sqrt{3},$$

dla $x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, ...:$

Zadanie 19.32 .
(i) *Znajdź rozwiązanie nierówności*

$$ctg\ x \geq tg\ x$$

w przedziale otwartym $(0, \frac{\pi}{2})$.
(ii) *Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności*

$$tg\ x \geq ctg\ x,$$

dla $x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, ...:$

Zadanie 19.33 .
Znajdź rozwiązanie nierówności

$$tg^2 x - 1 \geq 0$$

w przedziale otwartym $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

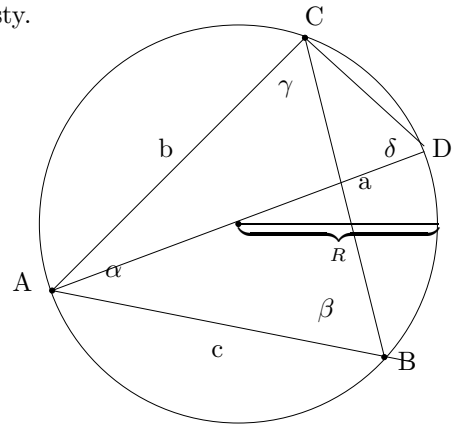
19.7 Twierdzenie sinusów

Twierdzenie 19.1 *W dowolnym trójkącie stosunek długości boków do sinusów kątów leżących na przeciw boków jest stały i równy średnicy okręgu opisanego na tym trójącie. To znaczy*

$$\frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \tag{19.9}$$

Istnie kilka dowodów twierdzenia sinusów. Tutaj podamy dwa dowody związane relacją pomiędzy kątem wpisanym w okrąg i kątem środkowym, którre są opartym na tym samym łuku.
Dowód I. Rozpatrujemy okrąg opisany na trójkącie ΔABC o promieniu R. Z wierzchołka A prowadzimy średnicę okrcęgu do przecięcia z okręgiem w punkcie D. Zauważmy, że kąty wpisane w okrąg$\angle ABC = \beta$ i $\angle ADC = \delta$ są oparte na tym samym łuku $\widehat{AC}$. Zatem są

równe $\beta = \delta$. Trójkąt ΔADC jest prostokątny, gdyż kąt $\angle DCA$ o wierzchołku C opraty na średnicy jest prosty.



Okrąg opisany na trójkącie ΔABC

Z tego prostokątnego trójkąta ΔADC, znajdujemy sinus kąta δ. Mianowicie

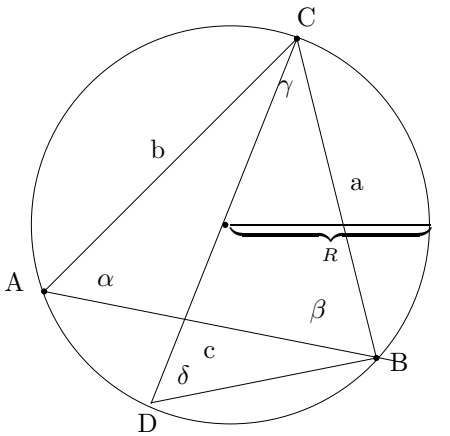
$$\sin\delta = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{b}{2R}, \qquad \text{oraz} \qquad \sin\beta = \frac{b}{2R} \qquad dla\ \ \beta = \delta$$

Skąt obliczamy

$$\frac{b}{sin\ \beta} = 2R \tag{19.10}$$

Podobnie dowodzimy tezy dla kąta α trójkąta ΔABC. Jedynie zmieniamy położenie średnicy, jak na rysunku

Dla kąta α prowadzimy średnicę CD z wierzchołka C trójkąta ΔABC do przecięcia z okręgiem w punkcie D. Zauważmy, że kąty wpisane w okrąg $\angle CAD = \alpha$ i $\angle ADB = \delta$ są oparte na tym samym łuku $\widehat{BC}$. Zatem są równe $\alpha = \delta$. Trójkąt ΔBCD jest prostokątny, gdyż kąt $\angle DBC$ o wierzchołku B oparaty na średnicy jest prosty.



Okrąg opisany na trójkącie ΔABC

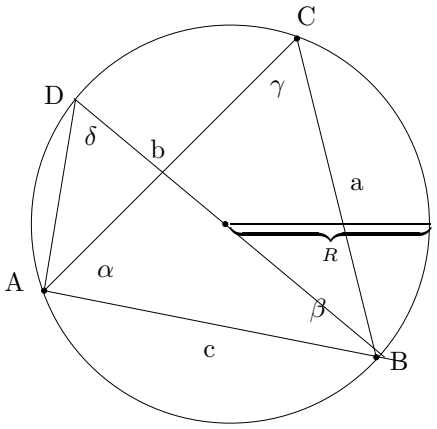
Z tego prostokątnego trójkąta ΔBCD, znajdujemy sinus kąta δ. Mianowicie

$$\sin\delta = \frac{|BC|}{|CD|} = \frac{a}{2R} \qquad \text{oraz} \qquad \sin\ \alpha = \frac{a}{2R} \qquad dla\ \ \alpha = \delta$$

Skąt obliczamy

$$\frac{a}{sin\ \alpha} = 2R \tag{19.11}$$

Dla kąta γ prowadzimy średnicę BD z wierzchołka B trójkąta ΔABC do przecięcia z okręgiem w punkcie D, jak na rysunku



Okrąg opisany na trójkącie ΔABC

Zauważmy, że kąty wpisane w okrąg $\angle BCA = \gamma$ i $\angle BDA = \delta$ są oparte na tym samym łuku $\widehat{AB}$. Zatem są równe $\gamma = \delta$. Trójkąt ΔBDA jest prostokątny, gdyż kąt $\angle DAB$ o wierzchołku A oparaty na średnicy jest prosty. Z tego prostokątnego trójkąta ΔBCD, znajdujemy sinus kąta δ. Mianowicie

$$\sin\delta = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{c}{2R} \qquad \text{oraz} \qquad \sin\gamma = \frac{c}{2R} \qquad dla\ \ \gamma = \delta$$

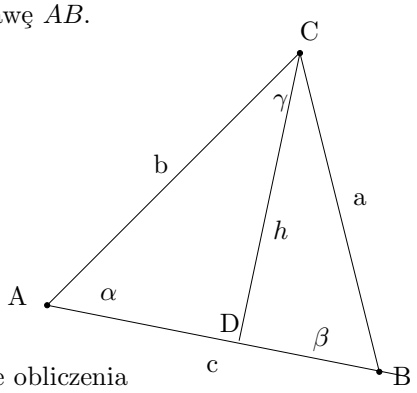
Skąt obliczamy

$$\frac{c}{sin\ \gamma} = 2R \tag{19.12}$$

Z równości (19.10, 19.11, 19.12) wynika teza twierdzenia (19.9)

$$\frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{b}{sin\ \beta} = \frac{c}{sin\ \gamma} = 2R \tag{19.13}$$

Dowód II. Rozpatrzmy trójkąt ΔABC. Poprowadźmy wysokość h z wierzchołka C trójkąta ΔABC na podstawę AB.



$h = a\ sin\ \alpha$

$h = b\ sin\ \beta$

skad otrzymamy

$a\ sin\ \alpha = b\ sin\ \beta$

$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\ \beta}$

Wykonując proste obliczenia

$h = b\ sin\ \alpha$
$h = b\ sin\ \beta$
$b\ sin\ \alpha = a\ sin\ \beta, \quad dzielimy\ obie\ strony\ przez\ sin\ \alpha\ *\ sin\ \beta$

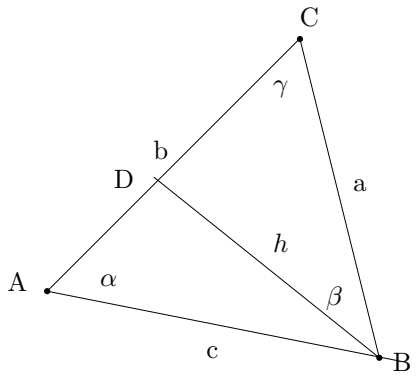
otrzymujemy oczekiwaną równość

$$\frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{b}{sin\ \beta} \tag{19.14}$$

W podobny sposób otrzymamy równość

$$\frac{c}{\sin\ \gamma} = \frac{b}{sin\ \beta}$$

Mianowicie, W trójkącie ΔABC prowadzimy wysokość h z wierzchołka B na podstawęAC



$h = a\ sin\ \gamma$

$h = c\ sin\ \alpha$

skad otrzymamy

$a\ sin\ \gamma = c\ sin\ \alpha$

$\frac{a}{sin\gamma} = \frac{c}{sin\ \alpha}$

Wykonując proste obliczenia

$h = a\ sin\ \gamma$
$h = c\ sin\ \alpha$
$b\ sin\ \alpha = a\ sin\ \beta, \quad dzielimy\ obie\ strony\ przez\ sin\ \alpha\ *\ sin\ \gamma$

otrzymujemy oczekiwaną równość

$$\frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{c}{sin\ \gamma} \tag{19.15}$$

Porównując równości (19.14) i (19.15) otrzymamy równość podwójną

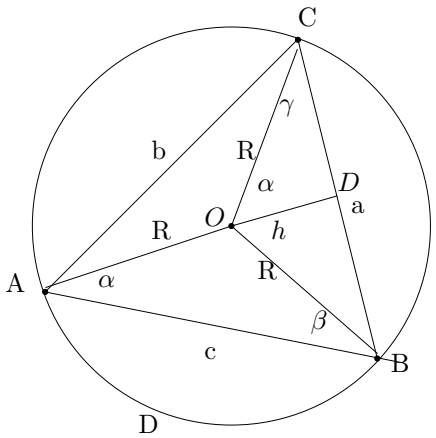
$$\frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{b}{\sin\ \beta} = \frac{c}{sin\ \gamma} \tag{19.16}$$

Pozostaje udowodnić, że stosunek długości boków trójkąta ΔABC do sinusów odpowiednich kątów jest stały i równy $2R$, to znaczy

$$\frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{b}{\sin\ \beta} = \frac{c}{sin\ \gamma} = 2R$$

Jeszcze raz rozpatrzmy trójkąt ΔABC i okrąg opisany na tym trójkąjkącie o promieniu R i środku w punkcie O. Ze środka tego trójkąta poprowdzźmy promienie do wierzchołków

$A,\ B,\ C$ orac wysokość $h = |OD|$ trójkąta ΔBCO, jak na rysunku



Okrąg opisany na trójkącie ΔABC

Zauważmy, że trójkąt ΔBCO jest równoramienny o długości ramion równej promienowi okręgu R

$$|OB| = |OC| = R$$

Zatem punkt D, to jest koniec wysokości $h = |OD|$, dzieli bok BC na połowę
Z twierdzenia o kącie środkowym i kącie wpisanym w okrąg opartych na tym samym łuku $\widehat{BC}$ wynika że kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego,

$$kat\ wpisany \quad \angle BAC = \alpha \quad i \ \ kat\ srodkowy \qquad \angle BOC = 2\alpha$$

Wysokość h trójkąta równoramiennego ΔBCO dzieli kąt śrokowy $\angle COB = 2\alpha$ na połowę. Zatem kąt $\angle COB = \alpha$ w trójkącie prostokątnym ΔDCO o przeciwprostokątnej CO i przyprostokątnych $h = |OD|$ i $|DC| = \dfrac{a}{2}$.

Z trójkąta prostokątnego ΔDCO znajdujemy

$$sin\ \alpha = \frac{a}{2R}$$

Skąd otrzymujemy równość

$$\frac{a}{\sin\ \alpha} = 2R \tag{19.17}$$

Z równości (19.16) i (19.17) wynika teza twierdzenia (19.9)

$$\frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{b}{sin\ \beta} = \frac{c}{sin\ \gamma} = 2R$$

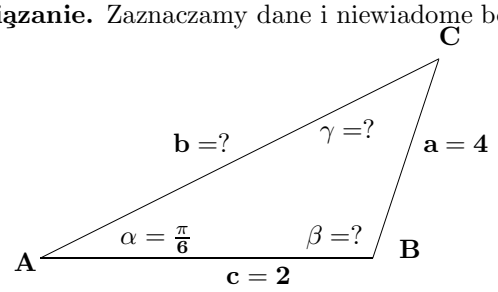
Twierdzenia sinusów stosujemy w prost do wyznaczania boków i kątów trójkąta, na podstawie następujących dawanych

1. dwóch boków i kąta naprzeci w jednego z nich,

2. boku i dwóch kątów przyległych do tego boku,

Przykład 19.15 *Oblicz boki i kąty trójkąta ΔABC, mając długości dwóch boków $|AB| = c = 4$ i $|BC| = a = 2$ kąt $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ leżący na przeciw boku $[BC]$.*

Rozwiązanie. Zaznaczamy dane i niewiadome boki i kąty na rysunku



Trójkąt $\triangle ABC$

Z twierdzenia sinusów obliczamy promień R okręgu opisanego na trójkącie

$$\frac{a}{\sin\ \alpha} = 2R, \quad \frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2R, \quad \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2R, \quad R = 2.$$

Następnie również z twierdzenia sinusów obliczamy sinus kąta γ leżącego naprzeciw boku $|AB| = c = 2$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R, \quad \sin\gamma = \frac{c}{2R} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Skąd znajdujemy kąt $\gamma = \frac{\pi}{6}$ i kąt β z sumy kątów w trójkącie

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad \beta = \pi - \alpha - \gamma = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

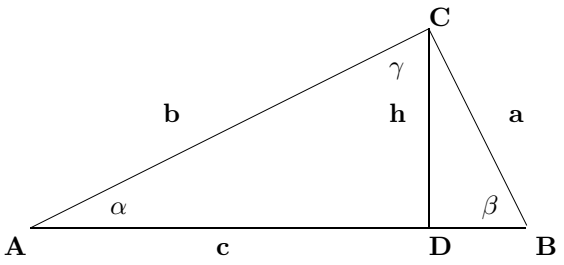
Pozostały bok $|AC| = b$ obliczamy z twierdzenia sinusów

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R, \quad b = 2R\sin\beta = 2 * 2 * \sin\frac{2\pi}{3} = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

19.8 Twierdzenie cosinusów

Podobnie jak twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów stosujemy do obliczanie boków i kątów dowolnych trójkątów.

Twierdzenie 19.2 *W dowolnym trójkącie* ΔABC



Trójkąt $\triangle ABC$

o bokach i kątach zaznaczonych na rysunku zachodzą następujące związki pomiędzy bokami i kątami

$$(i) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2b\, c \cos\, \alpha$$

$$(ii) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2a\, c \cos \beta$$

$$(iii) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2a\, b \cos \gamma$$

Dowód. Udowodnimy pierwszą z wymienionych wyżej równości. Zauważmy, że w przypadku trójkąta prostokątnego, gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wzór (i) jest prawdziwy, gdyż wtedy $cos\ \alpha = 0$ i stosuje twierdzenie Pitagorasa. Dla $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Punkt **D**, spodek wysokści **h**, dzieli bok $[AB]$ na dwie części $|AD|$ i $DB|$, gdzie [9]

$$|AD| = b\ \cos\ \alpha, \quad i \quad |DB| = a\ \cos \beta.$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów ΔADC i ΔDBC, obliczamy

$$h^2 = |AC|^2 - |AD|^2$$

$$oraz$$

$$h^2 = |BC|^2 - |BD|^2$$

Porównując prawe strony powyższych równości otrzymamy równość

$$|AC|^2 - |AD|^2 = |BC|^2 - |DB|^2 \tag{19.18}$$

Następnie podstawiając do równości (19.18)

$$a = |BC|, \qquad b = |AC|, \qquad c = |AB|,$$

$$|AD| = b\ cos\ \alpha, \quad |DB| = c - |AD|, \quad |DB| = c - b\ cos\ \alpha$$

otrzymamy związek (i), w forminie nieuproszczonej, pomiędzy bokami i kątami trójkąta ΔABC

$$\underbrace{b^2 - (b\ cos\ \alpha)^2}_{|AC|^2 - |AD|^2} = \underbrace{a^2 - (c - b\ cos\ \alpha)^2}_{|BC|^2 - |DB|^2} \tag{19.19}$$

Uproaszcając powyższe wyrażenia algebraiczne

$$b^2 - (b\ cos\ \alpha)^2 = a^2 - (c^2 - 2b\ c\ cos\ \alpha + b^2 cos^2\ \alpha)$$

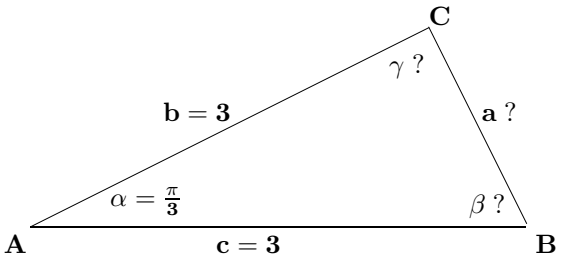
otrzymamy pierwszą tezę (i) twierdzenia cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\ c\ cos\ \alpha$$

Pozostałe wzory (ii) oraz (iii) dowodziemy podobnie. Mianowicie, żeby wyprowadzić wzór (ii) należy poprowadzić wysokość h z wierzchołka A na bok BC. Natomiast dla dowodu tezy (iii) należy poprowadzić wysokość h z wierzchołka B trójkąta ΔABC na bok AC.

[9] Przypominamy że $|AD|$ oznacza długość odcinka $[A, D]$

Przykład 19.16 *W trójkącie ΔABC, dana jest długości boku $|AB| = 3$ i boku $|AC| = 3$ oraz warość kąta między nimi $\alpha = \frac{\pi}{3}$, jak na rysunku, oblicz długość bok* **a** *i kąty β, γ.*



Trójkąt $\triangle ABC$

Rozwiązanie. Z twierdzenia cosinusów obliczamy

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c\cos\,\alpha &= 3^2 + 3^2 - 2 * 3 * 3 * \tfrac{1}{2} \\ &= 9 + 9 - 9 = 9. \end{aligned}$$

Ską długość boku $a = \sqrt{9} = 3$.
Mając boki trójkąta, a, b, c obliczamy cosinus kątów β i γ.

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a\,c} = \frac{3^2 + 3^2 - 3^2}{2 * 3 * 3} = \frac{1}{2},$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a\,b} = \frac{3^2 + 3^2 - 3^2}{2 * 3 * 3} = -\frac{1}{2}$$

Jeżeli $cos\ \beta = \frac{1}{2}$ i $cos\ \gamma = \frac{1}{2}$ to kąt $\beta = \frac{\pi}{3}$ i kąt $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

19.8.1 Zadania

Zadanie 19.34 *Oblicz boki i kąty trójkąta ΔABC mając długość dwóch boków*

$$|AB| = 5, \quad |AC| = 5 \quad i \quad kat\ \angle\ ABC = 30^o$$

Zadanie 19.35 *Oblicz boki trójkąta ΔABC mając długość boku $|BC| = 25$ i kąty*

$$\angle CAB = 30^o, \quad \angle\ ABC = 60^o$$

Zadanie 19.36 *Oblicz kąty trójkąta ΔABC mając długośći boków*

$$|AB| = 15m, \quad |BC| = 30m, \quad |AC| = 45m$$

19.9 Funkcje cyklometryczne

Funkcje cyklometryczne inaczej funkcje kołowe $\arcsin\alpha, \arccos\alpha, \arctan\alpha$ i $\operatorname{arcctg}\alpha$ są funkcjami odwrotnymi do funkcji trygonometrycznych w przedziałach w których funkcje $sin\ \alpha$, $cos\ \alpha$, $tg\ \alpha$, $ctg\ \alpha$ są rosnące lub malejące.

Na przykład, funkcją odwrotną do funkcji sin α jest funkcja $arcsin\ \alpha$ określona w przedziale otwartym dla $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ lub ogólnie dla

$$\alpha \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2 * k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

Funkcją odwrotną do funkcji cos α jest funkcja $arccos\ \alpha$ określona w przedziale otwartym dla $\alpha \in (0, \pi)$ lub ogólnie dla

$$\alpha \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2 * k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

Podobnie, funkcje odwrotne do funkcji $tg\ \alpha$ i $ctg\ \alpha$ są funkcje $arctg\ \alpha$ i $arcctg\ \alpha$ określone w przedzialach otwartych
tangens dla

$$\alpha \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

i cotangens dla

$$\alpha \in (k\pi, (k+1)\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

19.9.1 Arcus sinus

Funkcja $y = sinx$ jest rosnąca w przedziale domkniętym $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $[-1, 1]$. Zatem funkcja odwrotna

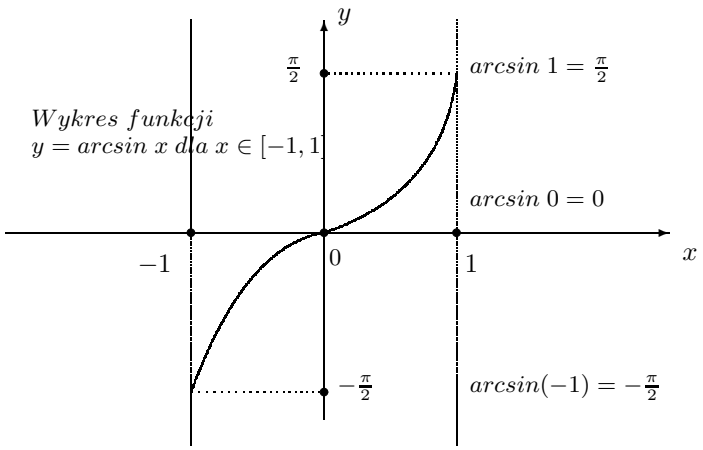
$$x = \arcsin y$$

do funkcji $y = \sin x$ istnieje i jest określona w przedziale domkniętym $[-1, 1]$. To znaczy, że dziedziną funkcji odwrotnej $x = \arcsin y$ do funkcji $y = \sin x$ jest zbiór wartości funkcji $y = \sin x$.

Zatem dla funkcji odwrotnej $x = arcsin\ y$ zmienną niezależną jest $y \in [-1, 1]$, a zmienną zależ jest $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Niżej na wykresie w funkcji arcus sinus zmieniamy role zmiennych $x,\ y$ przyjmując

$$y = arcsin\ x, \qquad y \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad gdy \qquad x \in [-1, 1]$$



Wartości funkcji $y = arcsin\ x$ dla wybranych wartości argumentu x są podane w tablicy

x^o	$radian$	$y = \sin x$	$x = \arcsin y$
-90^o	$-\frac{\pi}{2}$	-1	$-\frac{\pi}{2}$
-60^o	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
-45^o	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
-30^o	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
0^o	0	0	0
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{4}$
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$

Zauważmy, że zachodzą następujące tożsamości

$$(i) \quad \arcsin(\sin x) \equiv x, \quad \text{dla} \quad -\tfrac{\pi}{2} \leq x \leq \tfrac{\pi}{2}$$

$$(ii) \quad \sin(\arcsin x) \equiv x \quad \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Rzeczywiście, niech

$$y = \sin x \qquad dla \qquad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Wtedy funkcja $\sin x$ jest rosnąca i funkcja do niej odwrotna $x = \arcsin y$ istnieje i jest określona dla $y \in [-1, 1]$.
Podstawiając do lewej strony (i) $y = \sin x$, otrzymujemy tożsamość (i).
Podobnie, niech

$$y = \arcsin x \qquad dla \qquad x \in [-1, 1].$$

Wtedy funkcja $\arcsin x$, jest rosnące i funkcja do niej odwrotna $x = \sin y$ istnieje i jest określona dla $y \in [-1, 1]$.
Podstawiając $y = \arcsin x$ do równości $x = \sin y$, otrzymujemy tożsamość (ii).

19.9.2 Arcus cosinus

Funkcja $y = \cos x$ jest malejąca w przedziale $[0, \pi]$. Zbiorem wartości funkcji cosinus jest przedział $[-1, 1]$. Zatem funkcja odwrotna $x = \arccos y$ do funkcji $y = \cos x$ istnieje i jest określona w przedziale $[-1, 1]$. To znaczy, że dziedziną funkcji odwrotnej

$$x = \arccos y$$

do funkcji

$$y = cos\ x$$

jest zbiór wartości funkcji $y = cosx$. Natomiast zbiorem wartości funkcji $x = arccosy$ jest przedział $[0, \pi]$.
Niżej na wykresie w funkcji arcus cosinus zmieniamy role zmiennych x, y przyjmując

$$y = arccos\ x, \qquad y \in [0, \pi], \quad gdy \qquad x \in [-1, 1]$$

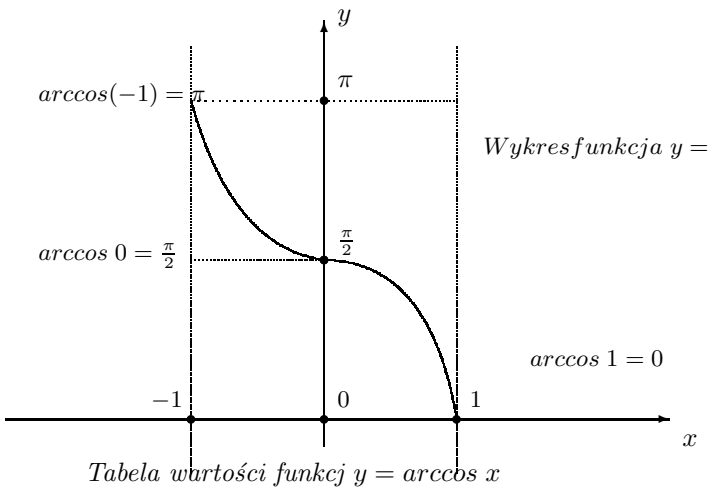


Tabela wartości funkcj $y = arccos\, x$ dla wybranych wartości argumentu x.

x^o	*radian*	$y = \cos x$	$x = \arccos y$
0	0	1	0
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
135^o	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
150^o	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
180^o	π	-1	π

Zachodzi prosty zawiązek pomiędzy arcus sinus i arcus cosinus

$$arcsin\, x + arccos\, x = \frac{\pi}{2}. \tag{19.20}$$

Rzeczywiście, zauważamy, że prawdziwa jest nierówność

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin x \leq \pi.$$

Z nierówności

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}.$$

i z równość

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \arccos x) = \sin(\arcsin x)$$

wynika tożsamość (19.20).

19.9.3 Arcus tangens

Funkcja tangens $y = tg\ x$ jest okresowa o okresie $\omega = \pi$ i określona dla argumentu różnego od nieparzystej wielokrotnoći kąta prostego $\frac{\pi}{2}$.

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

Przedziałem wartości funkcji tangens jest zbiór liczb rzeczywistych $R = (-\infty, \infty)$.
Funkcja $y = tg\ x$ jest rosnąca od $-\infty$ do ∞ w przedziale otwartym

$$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Dlatego istnieje funkcja odwrotna

$$x = arctg\ y,$$

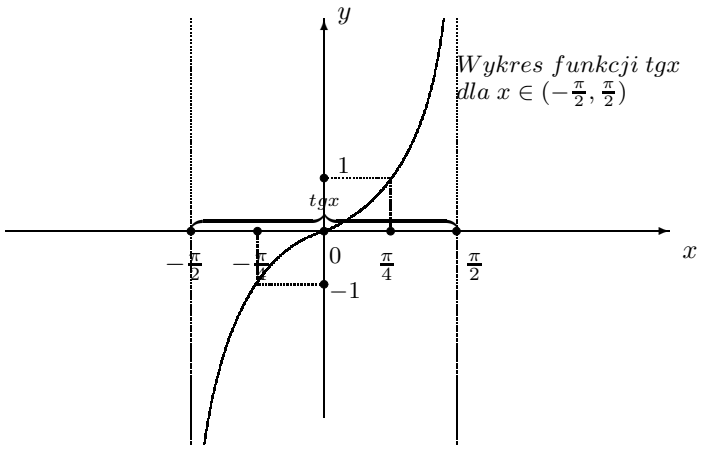
do funkcji $y =$ tg x w przedziale otwartym $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Bez zmiany własności funkcji arcus tangens możemy zamienić zmienne x, y miejscami, pisząc

$$y = arctan\ x.$$

Wartości funkcji arcus tangens należą do przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, piszemy

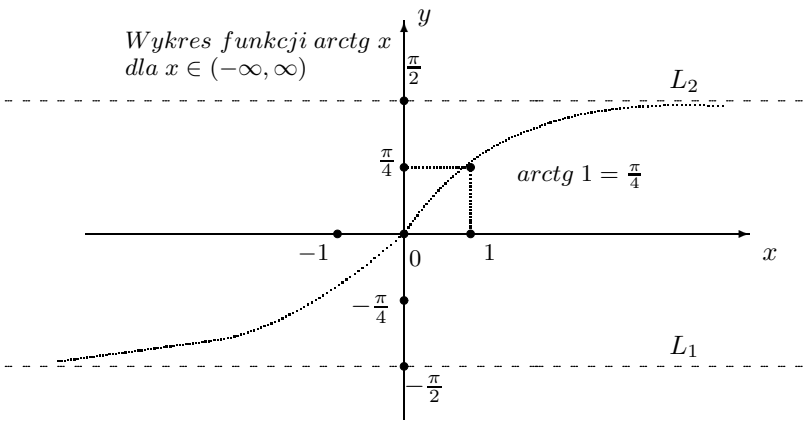
$$-\frac{\pi}{2} < arctg\ x < \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Rozpatrzmy jeszcze raz wykres funkcji tangens. Zauważmy, że wykres funkcji arcus tangens odwrotnej do funkcji tangens otrzymamy przez obrót wykresu funckcji tangens w kierunku przeciwnym do ruch wskazówek zegara patrząc na wykres z odwrotnej strony.



Na wykresie zaznaczony jest zakres wartości funkcji

$$y = arctg\ x \ \ dla \quad x \in (-\infty, \infty).$$



Funkcja arctagx ma dwie asymptoty L_1 i L_1 rownolegle do osi x

19.9.4 Arcus cotangens

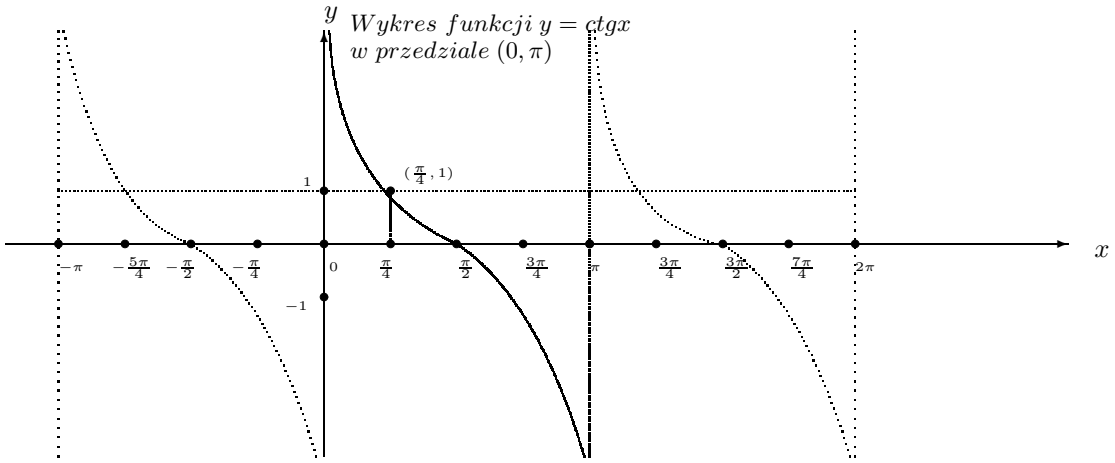
Funkcja $y = ctg\ x$ jest malejąca w przedziale otwartym $(0, \pi)$ i jej zbiorem wartości są wszystkie liczby rzeczywiste $-\infty < y < \infty$. Zatem funkcja odwrotna $x = \text{arcctg}\ y$ istnieje i jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych $-\infty < y < \infty$. Natomiast jej zbior wartości zmienia się w zakresie od 0 do π, to znaczy

$$0 < \text{arcctg}\ y < \pi, \qquad -\infty < y < \infty.$$

Podobnie jak w przypadku funkcji arcu tanges, bez zmiany własności funkcji arcus cotangens, zamieniamy zmienne x, y miejscami, pisząc

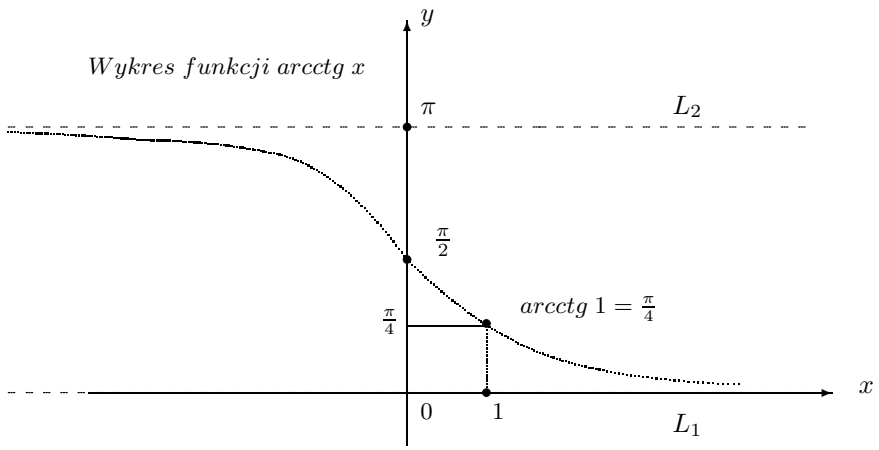
$$y = arcctg\ x, \quad dla \quad -\infty < x < \infty$$

Rozpatrzmy jeszcze raz wykres funkcji cotangens. Zauważmy, że wykres funkcji arcus cotangens odwrotnej do funkcji cotangens otrzymamy przez obrót wykresu funckcji cotangens w kierunku przeciwnym do ruch wskazówek zegara patrząc na wykres z odwrotnej strony.



Z wykresu funkcji cotangens tworzymy wykres funkcji odwrotnej arcus cotangens

$$y = arcctg\ x, \quad dla \quad -\infty < x < \infty$$



Funkcja arcctg x ma dwie asymptoty L_1 to jest os x i L_2 rownolegla do osi x

Zachodzi następujący zawiązek pomiędzy arcus tangens i arcus cotangens, pisząc

$$arctg\ x + arcctg\ x = \frac{\pi}{2}. \tag{19.21}$$

Rzeczywiście, zauważamy, że kąt

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \text{arctg}x \leq \pi,$$

gdyż kąt $-\frac{\pi}{2} \leq \text{arctg}x \leq \frac{\pi}{2}$. Zatem mamy tożsamość

$$\text{ctg}(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}x) = \text{arctg}x$$

Skąd wynika tożsamość (19.21).

19.9.5 Przykłady

Przykład 19.17 *Rozwiąż rwnanie*

$$arcsin\ x = \frac{\pi}{6}$$

Zaznacz na wykresie te wartości argumentu x dla których

$$arcsin\ x \geq \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie Z definicji funkcji arcus sininus wiemy, że jeżeli

$$arcsin\ x = \frac{\pi}{6}$$

to wtedy

$$x = sin\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

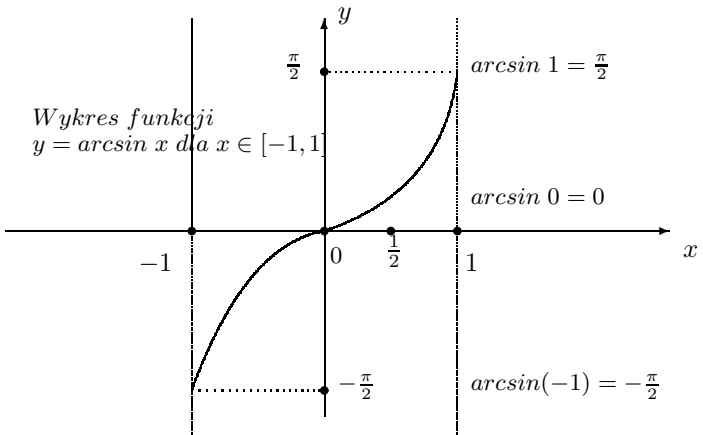
Nierówność

$$arcsin\ x \geq \frac{1}{2}$$

zachodzi, jeżeli

$$1 \geq x \geq sin\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Wartości funckcji $arcsin\ x \geq 1$ zaznaczamy na niżej podanym wykresie



Przykład 19.18 *Rozwiąż rwnanie i nierówność*

$$arccos\ x = \frac{\pi}{3}$$

$$arccos\ x \leq \frac{\pi}{3}$$

Rozwiązanie Z definicji funkcji arcus cosinus wiemy, że jeżeli

$$arccos\ x = \frac{\pi}{3}$$

to wtedy

$$x = cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Nierówność

$$arccos\ x \leq \frac{\pi}{3}$$

zachodzi, jeżeli

$$1 \geq\ x \geq cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

19.9.6 Zadania

Zadanie 19.37 *Oblicza wartość wyrażenia*

$$arcsin\frac{1}{2} + arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zadanie 19.38 *Oblicza wartość wyrażenia*

$$arccos\frac{1}{2} + arcscos\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zadanie 19.39 *Oblicza wartość wyrażenia*

$$arctg\frac{1}{\sqrt{2}} + arctg\sqrt{2}$$

Zadanie 19.40 *Podaj wykres funkcji*

$$f(x) = sin(arcsin\ x)$$

dla argumentu $x \in [-1, 1]$.

Zadanie 19.41 *Podaj wykres funkcji*

$$f(x) = cos(arcsin\ x)$$

dla argumentu $x \in [-1, 1]$.

Zadanie 19.42 *Rozwiąż równanie*

$$arcsin\ x - arccos\ x = 0$$

Zadanie 19.43 *Rozwiąż równanie*

$$2arcsin\ x - arccos\ x = \pi$$

Zadanie 19.44 *Rozwiąż równanie*

$$arctg\ x - arcctg\ x = 0$$

Zadanie 19.45 *Rozwiąż równanie*

$$3arctg\ x - 2arcctg\ x = \pi$$

Chapter 20

Kombinatoryka

Kombinatoryka obejmuje takie pojęcia jak silnia liczby naturalnej n, permutacje, wariacje bez powtórzeń i wariacje z powtórzeniami, kombinacje.
Niżej podany jest opis tych pojęć z licznymi przykładami i ćwiczeniami.

20.0.7 Silnia liczby naturalnej $n!$

Iloczyn kolejnych liczb naturalnych aż do liczby n włącznie nazywamy silnią liczby n i oznaczmy symbolem $n!$. Zatem mamy

$$n! = 1 * 2 * 3 * \cdots * (n-1) * n$$

Przyjmujmy że $0! = 1$
Wypiszmy kilka silni liczb naturalnych

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 1 * 2 = 2$
$3! = 1 * 2 * 3 = 6$
$4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$
$5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$
$6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$
$7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$
.....
.....
$(n-1)! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * \cdots * (n-1)$
$n! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) * n$

20.0.8 Przykłady

Obliczanie silni wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 20.1 *Oblicz wartość ułamka*

$$\frac{5! * 7!}{4! * 6!}$$

Rozwiązanie:
Łatwo uprościmy ten ułamek pisząc

$$5! = 4! * 5, \quad 7! = 6! * 7$$

$$\frac{5! \ * \ 7!}{4! \ * \ 6!} = \frac{4! * 5 \ * \ 6! * 7}{4! \ * \ 6!} = 5 * 7 = 42$$

Przykład 20.2 *Uprość ułamek*

$$\frac{n!}{(n-1)}!$$

Rozwiązanie:
Łatwo uprościmy ten ułamek pisząc

$$\begin{aligned}
(n-1)! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) \\
n! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) * n \\
\frac{n!}{(n-1)!} &= \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1) * n}{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n-1)} = n
\end{aligned}$$

Zasanie 20.1 *Oblicz wartość ułamka*

$$\frac{3! \ * \ 5! \ * \ 7! \ * 9!}{2! \ * \ 4! \ * \ 6! \ * 8!}$$

Zasanie 20.2 *Uprość ułamek*

$$\frac{2n!}{(2n-3)!}$$

20.0.9 Permutacje

Permutacją elementów zbioru nazywamy ich ustawienie w pewnej kolejności. Dwie permutacje składające się z tych samych elementów są różne, jeżeli różnią się kolejnością elementów.

Na przykład:

Permutacje cyfr liczby dwucyfrowej 23 składają się z tych samych cyfr 2 i 3 tworzą dwie różne permutacje

$$23 \quad i \quad 32 \qquad \textit{ilosc permutacji} \quad 2! = 2$$

Zauważmy, że innych permutacji cyfr 2 i 3 nie ma.

Podobnie wypiszmy wszystkie permutacje cyfr liczby trzycyfrowej 257

$$\begin{array}{ll} 257 & 275 \\ 527 & 572 \\ 725 & 752 \end{array} \qquad \textit{ilosc permutacji} \quad 3! = 6$$

Przykład 20.3 *Wypisz wszystkie permutacje zbioru dwuelementowego ab*

$$ab \quad ba \qquad \textit{ilosc permutacji} \quad 2! = 2$$

Zauważmy, że innych permutacji liter a i b nie ma.

Podobnie wypiszmy wszystkie permutacje zbioru trzyelementowego abc

$$\begin{array}{ll} abc & acb \\ bac & bca \\ cab & cba \end{array} \qquad ilosc\ permutacji \quad 3! = 6$$

Ogólnie, ilość permutacji n-elementowego zbioru równa jest n!

Zasanie 20.3 *Wypisz wszystkie permutacje cyfr liczby trzycyfrowej* 391

Zasanie 20.4 *Wypisz wszystkie permutacje elementów zbioru czteroelementowego ABCD*

20.0.10 Wariacje

Wariacją k-elementową ze zbioru n-elomentowego ($n \geq k$) nazywamy ciąg k elementów wybranych ze zbioru n-elementowego. Ciąg k-elementowy jest wariacją z powtórzeniami, jeżeli w tym ciągu mogą powtarzać się elementy zbioru z którego tworzone są wariacje. Natomiast k-elementowa wariacja bez powtórzeń jest ciągiem w którym nie ma powtórzeń elementów zbioru n-elementowego. W wariacjach bez powtórzeń i w wariacjach z powtórzeniami kolejność elementów jest ważne, to znaczy, że dwie wariacje są różne, jeżeli składają się z tych samych elementów ale różnią się kolejnością elementów.

20.0.11 Wariacje z powtórzeniami.

Pojęcie wariacji bez powtórzeń lub z powtórzeniami dobrze illustruje proces losowania ze zbioru n-elementowego, który zawiera tylko elementy różne.

Mianowicie, wariacje z powtórzeniami tworzymy w ten sposób, że wylosowany element wrzucamy spowrotem do urny przed losowaniem następnego elementu. Losujemy tak długo aż wylosujemy k-elementów. W ten sposób otrzymamy ciąg k-elementów w którym może być wylosowany ten sam element co najwyżej k-razy.

Podobnie tworzymy k-elementowe wariacje bez powtórzeń z tą różnicą, że wylosowanego elementu nie wrzucamy spowrotem do urny przed losowaniem następnych elementów. W ten sposób otrzymujemy k-elementową wariacje w której wszystkie elementy są różne, to znaczy, że nie ma elemetów powtórzonych.

Ilość możliwych k- elementowych wariacji z powtórzeniami utworzynych ze zbioru n-elementowego obliczamy ze wzoru

$$V_n^k = n^k$$

20.0.12 Przykłady

Pojęcie wariacji z powtórzaniemi i obliczanie ilości k-elementowych wariacji z powtórzaniami wybranymi ze zbioru n-elementowgo illustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 20.4 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe z powtórzeniami ze zbioru też 2-elementowego. Łatwo znajdujemy

$$\begin{array}{ll} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych utworzonych cyfra 1 i 2 to ilość wariacji z powtórzeniami $V_2^2 = 2^2 = 4$

Przykład 20.5 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe z powtórzeniami ze zbioru 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$\begin{array}{ccc} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych utworzonych cyfra $1,\ 2,\ 3$ to ilość wariacji z powtórzeniami $V_3^2 = 3^2 = 9$

Przykład 20.6 *Wypisz wszystkie liczby trzycyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby trzycyfrowe to są wariacje 3-elementowe z powtórzeniami ze zbioru też 3-elementowego. Łatwo znajdujemy liczby trzycyfrowe

$$\begin{array}{ccc} 111 & 122 & 113 \\ 121 & 122 & 123 \\ 131 & 132 & 133 \\ 211 & 212 & 213 \\ 221 & 122 & 123 \\ 231 & 132 & 233 \\ 311 & 312 & 313 \\ 321 & 322 & 323 \\ 331 & 332 & 333 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb trzycyfrowych utworzonych cyfra $1,\ 2,\ 3$ to ilość wariacji z powtórzeniami $V_3^3 = 3^3 = 27$

Zasanie 20.5 *Wypisz wszystkie wariacje 2-elementowe z powtórzeniami utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a,\ b,\ c\}$.

Zasanie 20.6 *Wypisz wszystkie wariacje 3-elementowe z powtórzeniami utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a,\ b,\ c\}$.

Zasanie 20.7 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr* $\{2,\ 5,\ 7,\ 9\}$.

20.0.13 Wariacje bez powtórzeń

Wariacja k-elementowa bez powtórzeń to ciąg elementów różnych wybranych ze zbioru n-elementowego $(1 \leq k \leq n)$.

Liczba wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń wybranych ze zbioru n-elementowego określona jest wzorem:

$$W_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1) * (n-k+2) * \cdots * (n-1) * n$$

lub pisząc iloczyn w odwrotnej kolejności jego czynników mamy wzór

$$W_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n * (n-1) * \cdots * (n-k) * (n-k+1).$$

20.0.14 Przykłady

Pojęcie wariacji bez powtórzeń i obliczanie ilości k-elementowych wariacji bez powtórzeń wybranych ze zbioru n-elementowgo illustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 20.7 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru też 2-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$12 \quad 21$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1 i 2 to ilość wariacji bez powtórzeń. W tym przypadku równa jest ilości permutacji $W_2^2 = 2! = 2$

Przykład 20.8 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$\begin{array}{cc} 12 & 13 \\ 21 & 23 \\ 31 & 32 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach utworzonych cyfr 1, 2, 3 to ilość wariacji bez powtórzeń

$$W_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6.$$

Przykład 20.9 *Wypisz wszystkie liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:
W tym przykładzie liczby trzycyfrowe to są wariacje 3-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru też 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach

$$\begin{array}{cc} 123 & 132 \\ 213 & 231 \\ 312 & 321 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1, 2, 3 to ilość wariacji bez powtórzeń. W tym przykładzie to jest ilość permutacji $W_3^3 = 3! = 6$

Zasanie 20.8 *Wypisz wszystkie wariacje 2-elementowe bez powtórzeń utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a, b, c\}$.

Zasanie 20.9 *Wypisz wszystkie wariacje 3-elementowe bez powtórzeń utworzone ze zbioru 3-elementowego* $\{a, b, c\}$.

Zasanie 20.10 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr* $\{2, 5, 7, 9\}$.

Zasanie 20.11 *Wypisz wszystkie wariacje bez powtórzeń 2-elementowe wybrane ze zbioru 4-elementowego* $\{a, b, c, d\}$.

20.0.15 Kombinacje

Kombinacją k-elementową wybraną ze zbioru n-elementowego nazywamy k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego. Zatem w kombinacji kolejność elementów nie jest ważna. To znaczy, że dwie kombinacje są różne tylko wtedy gdy różnią się co namniej jednym elementem.

Ilość kombinacji k-elementowych wybrach ze zbioru n-elementowego obliczmy ze wzoru

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

lub stosując symbol Newtona piszemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zatem ilość kombinacji k-elementowych wybranych ze zbioru n-elementowego równa jest ilości k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego.

20.0.16 Przykłady

Pojęcie kombinacji i obliczanie ilości k-elementowych kombinacji wybranych ze zbioru n-elementowgo illustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 20.10 *Ile można utworzyć par do gry w szachy w klasie liczącej 20 uczniów, żeby każdy uczeń grał tylko raz z każdym wybranym uczniem?*

Rozwiązanie:
Ilość par utworzonych z 20 uczniów równa jest ilości kombinacji 2-elementowych ze zbioru 20-elementowego, gdyż dwie pary są różne tylko wtedy gdy różnią się co najmniej jednym elementem, czyli każda para jest 2-elementowym podzbiorem.
Każdy uczeń może dobrać partmera do gry w szachy na $20-1=19$ sposobów. Zatem ilość par różnych równa się $\frac{19*20}{2} = 190$.
Ilość kombinacji 2-elementowych ze zbioru 20-elementowego obliczamy również ze wzoru

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{19*20}{2} = 190$$

Przykład 20.11 *W klasie jest 15 uczniów. Na ile sposobów można wybrać*

(i) trzech przedstawicieli

(ii) czterech przedstawicieli

Rozwiązanie (i):
Dwie trójki są różne, jeżeli różnią się co namniej jednym uczniem, kolejność wyboru uczniów do trójki jest nie ważna. Zatem pytanie jest ile można utworzyć 3-elementowych kombinacji ze zbioru 15-elementowego lub ile można utworzyć 3-elementowych podzbiorów ze zbiroru 15-elementowego ?
Obliczamy ze wzoru:

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{13*14*15}{6} = 13*7*5 = 455$$

Odpowiedź: Ilość możliwych przedstawicieli uczniów w grupach po 3 równa jest 455 trójek
Podobne jest rozwiązanie (ii)

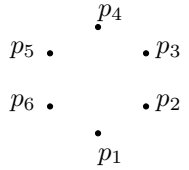
Przykład 20.12 *Ile jest możliwych wyników w grze "Duży Lotek", jeżeli wybieramy* 6 *liczb z* 49 *liczb ?*

Rozwiązanie:
Ilość możliwych wyników równa jest ilości kombinacji 6-elementowych wybranych ze zbioru 49-elementowego.
Zatem obliczamy stosując wzór

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{43*44*45*46*47*48*49}{1*2*3*4*5*6} = 13983816$$

Odpowiedź: W "Dużym Lotku" ilość możliwych wyników równa jest 13983816

Przykład 20.13 *Na okręgu zaznaczono sześć punktów* $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$



Wielokąty o wierzchołkach na okręgu

Ile można narysować różnych wielokątów w tym

(a) trójkątów

(b) czworokątów

(c) pięciokątów

(d) sześciokątów

o wierzchołkach na okręgu w punktach $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$

Rozwiązanie:
Dwa wielokąty są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym wierzchołkiem. Podobnie dwie kombinacje są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym elementem.
Zatem ilość trójkątów równa jest ilości 3-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych trójkątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_{6}^{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2*3*1*2*3} = \frac{4*5*6}{1*2*3} = 4*5 = 20.$$

Podobnie ilość czworokątów równa jest ilości 4-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych czworokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_{6}^{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2**3*4*1*2} = \frac{5*6}{1*2} = 15.$$

Ilość pięciokątów równa jest ilości 5-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych pięciokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_{6}^{5} = \frac{6!}{5!(6-5)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2*3*4*5*1} = \frac{6}{1} = 6.$$

Ilość sześciokątów równa jest ilości 6-elemntowych komabinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych sześciokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_{6}^{6} = \frac{6!}{6!(6-6)!} = \frac{1*2*3*4*5*6}{1*2*3*4*5*6*0!} = 1, \quad gdyz \quad 0! = 1.$$

20.1 Zadania

Zadanie 20.1 *Oblicz wartość ułamka*

$$\frac{4! \ * \ 5! + 3! * 4!}{5! \ * \ 6!}$$

Zadanie 20.2 *Uprość ułamek*

$$\frac{n! + 5!}{(n-3)}!$$

Zadanie 20.3 *Wypisz wszystkie permutacje zbioru* $5ab$

Zadanie 20.4 *Wypisz wszystkie permutacje cyfr liczby trzycyfrowej* 987

Zadanie 20.5 *Wypisz wszystkie liczby różne utworzone z cyfr*

Zadanie 20.6 *Wypisz wszystkie wariacje bez powtórzeń 3-elementowe wybrane ze zbioru 5-elementowego* $\{a,\ b,\ c,\ d\}e$.

Zadanie 20.7 *Ile można utworzyć par do gry w szachy w klasie liczącej 25 uczniów, żeby każdy uczeń grał tylko raz z każdym wybranym uczniem?*

Zadanie 20.8 *Ile jest możliwych wyników w grze liczbowej, jeżeli wybieramy* 5 *liczb z* 45 *liczb ?*

Chapter 21

Statystyka opisowa

Pierwszym i ważnym etapem opracowań statystycznych jest zbieranie i prezetacja danych. Najważniejsze dane statystyczne podawane są w każdym roku przez Główny Urząd Statystyczny (GUS) z siedzibą w Warszawie. Dotyczą one informacji o ludności w Polsce, dane o wzorście w przemyśle i rolnictwie, w ekonowmi i finansach. Te dane stanowią ważną informację dla planowania i administracji państwa. Oprócz tego dane statystyczne zbierane są w ankietach z pytaniami o szczególnym znaczeniu. Na przykład w sondażach i prognozach w wyborach do sejmu i w ważnych decyzjach administrcji w których głos społeczeństwa ma istotne znaczenie. Zebrane dane statystyczne przedstawiamy w tabelach i ilustrujemy na diagramach. Stosowane są różne formy diagramów. Najbardziej powszechne diagramy są w formie słupków lub koła z zaznaczeniem kolorów lub danych liczbowych lub w procentach. Zatem diagramy są prostym i ważnym sposobem prezetacji danych statystycznych.

21.1 Przykłady danych statystycznych i diagramów

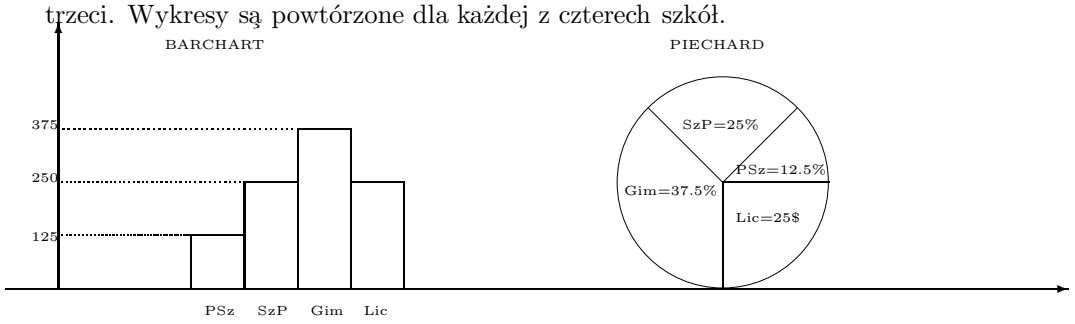
Dane statystyczne piszemy w tablicach z opisem ich znaczenia i wartości liczbowych.

Przykład 21.1 *W zespole szkół było Przedszkole, Szkoła Podstawowa, Gimnazjum i Liceum. W poniżeszej tabeli zebrano informacje dotyczące liczby uczniów*

Rodzaj Szkoły	Liczba uczniów	Część z całości	Procent
Przedszkole (PSz)	125	1/8 z 1000	12.5%
Szkoła Podstawowa (SzP)	250	1/4 z 1000	25%
Gimnazjum (Gim)	375	3/8 z 1000	37.5%
Liceum (Lic)	250	1/4 z 1000	25%
Razem	1000	$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=1$	100%

W niżej podanych diagramach w formie słupków i koła podane są wykresy dziewcząt, chłopców i razem uczniów w Przedszkolu (Psz), w Szkole Podstawowej (szP), w Gimnazjum (Gim), i w Liceuam (Lic).

Legenda: Dziewczęta słupek pierwszy, chłopcy słupek drugi i liczba uczniów raze słupek trzeci. Wykresy są powtórzone dla każdej z czterech szkół.



Legenda: Dziewczęta koło pierwsze, chłopcy koło drugie i liczba uczniów raze koło trzecie. Wykresy są powtórzone dla każdej z czterech szkół.

21.2 Wartość średnia i mediana

Ważnymi parametrami danych statystycznych są wartość średnia i mediana. **Wartość średnia srytmetyczna**. Wartością średnią arytmetyczną danych n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ nazywamy liczbę

$$\text{Srednia arytmetyczna } = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Wartość średnia arytmetyczna ważona. Bardziej ogólnym pojęciem średniej jest pojęcie średniej arytmetycznej ważonej. Mianowicie, niech wagami bedą liczby dodatnie $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ takie, że suma

$$\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n = 1, \quad \rho_i > 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Wtedy średnią ważoną nazywamy następującą sumę iloczynów

$$\text{Srednia arytmetyczna wazona } = \rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \cdots + \rho_n a_n$$

Istotnie, w przypadku szczególnym, gdy wagi są równe

$$\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_n = \frac{1}{n}$$

wtedy średnia arytmytyczna ważona jest poprostu średnią arytmetyczną.

Mediana. Dla danych statystycznych znajdujemy ich mediane to znaczy, że wartość, która leży w środku danych. Mianowicie, w pierwszej kolejności sortujemy dane porządkując je od najmiejszej do największej lub od największej do najmieszej. Wtedy liczba, która leży w równej odległości od początku i od końca uporządkowanych danych nazywa się mmedianą. Może zdażyć się że nie ma takiej jednej liczby, natomiast są dwie liczby obok siebie, które leżą w tej samaej odległości pierwsza od początku a druga od końca. Wtedy medianą jest ich średnia arytmetyczna.
Niżej, wyjaśniamy to na przykładach.

Przykład 21.2 *Rozpatrzmy następujące dane:*

$$(i)\quad 2,1,6,8,3,2,10,12,11$$

$$(ii)\quad 9,4,2,7,5,1,3,10,15,17,16$$

Rozwiązanie (i). Dane $2,1,5,8,3,2,10,12,11$ porządkujemy w kierunku rosnącym od najmieszej do największej
o]wnym

$$1,2,2,3,6,8,10,11,12$$

Zauważamy, że liczba 6 jest odległa od początku o cztery pozycje i od końca również o cztery pozycje. Zatem liczba 6 jest medianą danych (i).
Rozwiązanie (ii). Dane $0,-1,9,4,2,7,5,1,3,10,15,17,16$ porządkujemy w kierunku rosnącym od najmieszej do największej

$$-1,0,1,2,3,4,5,7,9,15,16,17$$

ku Zauważamy, że liczba 4 jest odległa od początku o pięć pozycji, a liczba 5 jest odległa od końca również o pięć pozycji. Zatem mamy dwie liczby w środku danych 4 i 5. Wtedy medianą jest ich średnia arytmetyczna, to znaczy $\frac{4+5}{2} = 4.5$. Odpowiedź: medianą danych (ii) jest liczba 4.5

21.2.1 Korelacja danych statystycznych

Rozpatrzmy dwa ciągi danych

$$a = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \qquad b = \{b_1, b_2, ..., b_n\},$$

o tej samej liczbie elementów n.

Defimnicja 21.1 *Korelacją danych statystycznych*

$$a = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \qquad b = \{b_1, b_2, ..., b_n\},$$

nazywamy następujący iloraz:

$$Cor(a,b) = \frac{a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \cdots + a_n\, b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}},$$

Dane statystyczne piszemy również w ich unormowanej formie. Mianowicie, niech

$$\begin{aligned} \hat{a} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_n\} &= \frac{\{a_1, a_2, ..., a_n\}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}, \\ \hat{b} = \{\hat{b}_1, \hat{b}_2, ..., \hat{b}_n\} &= \frac{\{b_1, b_2, ..., b_n\}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}, \end{aligned} \tag{21.1}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}, \quad \hat{b}_1 = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}, \\ \hat{a}_2 &= \frac{a_1}{\sqrt{a_2^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}, \quad \hat{b}_2 = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{a}_n &= \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}, \quad \hat{b}_n = \frac{b_n}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}} \end{aligned}$$

Zauważamy, że dane statystyczne (21.1) w unormowanej formie spełniają następujące warunki:

$$\hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2 + \cdots + \hat{a}_n^2 = 1, ; \quad \hat{b}_1^2 + \hat{b}_2^2 + \cdots + \hat{b}_n^2 = 1$$

Wtedy korelacja pomiędzy danymi a i b oraz korelacja pomiędzy danymi unormowanymi $\hat{a}$ i $\hat{b}$ jest ta sama i określana jak następuje:

Defimnicja 21.2 *Korelacją danych statystycznych*

$$\hat{a} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_n\}, \quad \hat{b} = \{\hat{b}_1, \hat{b}_2, ..., \hat{b}_n\}$$

nazywamy sumę następujących iloczynów:

$$Cor(a, b) = Cor(\hat{a}\ \hat{b}) = \hat{a}_1\ \hat{b}_1 + \hat{a}_2\ \hat{b}_2 + \cdots + \hat{a}_n\ \hat{b}_n,$$

Przykład 21.3 *Oblicz korelację pomiędzy danymi*

$$a = \{2, 1, 5, 8\}, \quad b = \{4, 3, 9, 3\}$$

Rozwiązanie. Podstawiając do wzoru dane

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 8,$$

$$b_1 = 4, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 9, \quad b_4 = 3$$

obliczamy współczynnik korelacji

$$\begin{aligned} Cor(a, b) &= \frac{a_1\ b_1 + a_2\ b_2 + \cdots + a_n\ b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}, \\ &= \frac{2 * 4 + 1 * 3 + 5 * 9 + 8 * 3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2 + 8^2}\sqrt{4^2 + 3^2 + 9^2 + 3^2}} = 0.769444, \end{aligned}$$

21.3 Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancja σ^2 danych statystycznych

$$a = \{a_1, a_2, ..., a_n\},$$

związana jest z ich średnią arytmetyczną

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

następującym wzorem:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - s)^2 + (a_2 - s)^2 + \cdots + (a_n - s)^2}{n}$$

Czytamy sigma.
Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Przykład 21.4 *Oblicz wariancje i odchylenie standardowe następujących danych:*

$$(i) \quad a = \{3, -1, 8, 4\}, \quad (ii) \quad b = \{12, 4, 8, 6\}.$$

Rozwiązanie (i). Rozwiązanie jest prostym i bezpośrednim podstawieniem danych do wzorów. Najpierw obliczamy wartość średnią

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{3 - 1 + 8 + 4}{4} = 3.5$$

następnie obliczamy wariancję

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(a_1 - s)^2 + (a_2 - s)^2 + \cdots + (a_n - s)^2}{n} \\ &= \frac{(3 - 3.5)^2 + (-1 - 3.5)^2 + (8 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)}{4} = 10.31 \end{aligned}$$

oraz odchylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{10.31} = 3.21131$$

Rozwiązanie (ii). Podobnie rozwiązanie przykładu (ii) jest prostym i bezpośrednim podstawieniem danych do wzorów. Najpierw obliczamy wartość średnią

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{12 + 4 + 8 + 6}{4} = \frac{30}{4} = 7.5$$

następnie obliczamy wariancję

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(a_1 - s)^2 + (a_2 - s)^2 + \cdots + (a_n - s)^2}{n} \\ &= \frac{(12 - 7.5)^2 + (4 - 7.5)^2 + (8 - 7.5)^2 + (6 - 7.5)^2}{4} = 8.75 \end{aligned}$$

oraz odchylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{10.31} = 2.95804$$

21.4 Zadania

Zadanie 21.1 *Na wykład z matematyki zapisali się studenci z biologi 20 studentów, chemii 40 studentów, fizyki 50 studentów, informatyki 50 studentów i z matematyki 40 studentów*
W poniżeszej tabeli zebrano informacje dotyczące liczby studentów

Przedmiot	Liczba uczniów	Część z całości	Procent
biologia (BIO)	20	1/10 z 200	10%
chemia (CHEM)	40	1/5 z 200	20%
fizyka(FIZ)	50	1/4 z 200	37.5%
informatyka (INF)	50	1/4 z 200	25%
matematyka(MAT)	40	1/5 z 200	12.5%
Razem	200	$\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 1$	100%

Narysuj przy pomocy linijki i cyrkla diagramy w formie słupków i koła dla studentów biologii (BIO), chemii (CHEM), fizyki (FIZ), informatyki (INF) i matematyki (MAT) .
Podaj również opis diagramów w formie legendy .

Zadanie 21.2 *Dla następujących danych*

$$(i) \quad 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22$$

$$(ii) \quad 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1$$

oblicz średnią arytmetyczną, średnią arytmetyczną z wagą $\rho = \frac{1}{10}$ i medianę

Zadanie 21.3 *Oblicz korelację pomiędzy danymi*

$$a = \{21, 15, 8, 8\}, \qquad b = \{1, 3, 6, 9\}$$

Zadanie 21.4 *Oblicz wariancje i odchylenie standardowe dla następujących danych:*

$$(i) \quad a = \{5, 1, 6, 4\}, \quad (ii) \quad b = \{10, 6, 2, 1\}.$$

Chapter 22

Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa

22.1 Wstęp

Podstawy rachunku prawdopodobieństwa stworzyli Pascal (1623-1662 n.e.) i
Fermat (1601-1665 n.e.) w połowie XVII-go wieku. W wiekach XVIII i XIX ważnym odkryciem było prawo wielkich liczb J. Bernoulliego i prace A. Moivre, P. Laplasa i S. Poissona. Czebyszewa, Browna i Kołmogorowa.
Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się badaniem praw rządzących zjawiskami losowymi (przypadkowymi), to jest takimi zjawiskami, których przebiegu czy wyniku nie można jednoznacznie przewidzieć. Dzieje się tak dlatego, że na przebieg zjawiska losowego wpływ ma na ogół wiele przyczyn, z których jedynie część udaje się kontrolować.
Wyniki zjawisk (doświadczeń) losowych nazywamy zdarzeniami losowymi.
Jeżeli doświadczenie losowe powtórzymy n razy i przy tym w tych n doświadczeniach dokładnie k razy zaobserwujemy wynik A (zdarzenie losowe A), to liczbę

$$\frac{k}{n}$$

nazywamy częstością zdarzenia losowego A w serii n doświadczeń.

W zjawiskach masowych częstości występowania każedego zdarzenia losowego mają tą własność, że wraz ze wrostem liczby n, te częstości "stabilizują się" coraz bardziej "blisko" pewnej liczby charakterystycznej dla tego zdarzenia.
Ogólnie w doświadczeniach powtarzanych w tych samych warunkach dla każdego doświadczenia, gdy możliwe są dwa wyniki, liczba "charakterystyczna" jest bliska połowie liczby doświadczeń. Wtedy częstości

$$\frac{k_n}{n} \to \frac{1}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots;$$

dążą do $\frac{1}{2}$, gdy liczba doświadczeń $n \to \infty$ dąży do nieskoćzoności.

Przykład 22.1 *Na przykład rzucając symetryczną monetą $n = 100,\ 200$ lub więcej razy zaobserwujemy około połowę reszek i około połowę orłów.*

Niżej podane wyniki w 100 i 200 rzutach monetą wskazują na stabilizację częstości "blisko" $\frac{1}{2}$ dla ilości doświadczeń $n \geq 200$.

(22.1)

Tablica

Ilość rzutów	liczba reszek	liczba orłów	częstość	częstość—
n	k	n-k	$\frac{k}{n}$	$\frac{n-k}{n}$—
100	61	39	0.61	0.39—
200	102	98	0.51—	0.41

22.2 Zdarzenia elementarne

W kadym doświadczeniu losowym możemy wyróżnić najprostrze wyniki zwane zdarzeniami elementarnymi.
Zbiór zdarzeń elementarnych oznaczamy literą Ω.

Przykład 22.2 *Rzucając monetą, możliwe są dwa wyniki reszka lub orzeł, innych możliwości nie ma. Zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

złożony z dwóch zdarzeń elementarnych ω_1, ω_2, gdzie zdarzenie elementarne ω_1 zachodzi, gdy w rzucie monetą pojawi się reszka, zdarzenie elementarne ω_2 zachodzi, gdy pojawi się orzeł.

Prawdopodobieństwo to jest liczba wokół, której stabilizuje się częstość, gdy ilość doświadczeń losowych zmiarza do niskończoności

Niżej stabilizacje częstości wokół liczby prawdopodobieństwa wstępnie opiszemy na wzorcowych przykładach.

Rzut monetą. Zaczynamy od najprostrzego doświadczenie rzutu monetą. Rzucając monetą, możliwe są dwa wyniki reszka lub orzeł, innych możliwości nie ma.

Pytamy, jakie szanse mamy, żeby pojawiła się reszka ?

Z dwóch możliwych wyników reszka, orzeł, jeden jest dla reszki i jeden jest dla orła. Zatem szansa pojawienia się reszki równa jest $\frac{1}{2}$ oraz pojawienia się orła również równa jest $\frac{1}{2}$.

Jeżeli wynik pojawienia się reszki oznaczymy literą A, a wynik pojawienia się orła literą B to prawdopodobieństwo pojawienia się reszki oznaczamy symbolem $P(A)$, a prawdopodobieństwo pojawienia się orła symbolem $P(B)$.
Wtedy piszemy

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

Prawdopodobieństwo $\frac{1}{2}$ oznacza, że w dużej ilości rzutów oczekujemy połowę reszek i połowę orłów.

Przykład 22.3 *Policz ile razy pojawi się reszka i ile razy pojawi się orzeł w 10-ciu rzutach monetą.*

Załóżmy, że reszka pojawiła się za pierwszym, piątym, ósmym i dziesiątym rzutem, razem 4 razy, natomiast orzeł pojawił się 6 razy.

Zdarzenie pojawienia się reszki oznaczamy literą A, zdarzenie pojawienia się orła oznaczamy literą B.
Obliczamy częstość pojawienia się reszki

$$Czestosc(A) = \frac{4\ zdarzenia\ sprzyjajace}{10\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Podobnie obliczamy częstość pojawienia się orła jako stosunek 6-ciu zdarzeń sprzyjających do wszystkich 10-ciu zdarzeń możliwych

$$Czestosc(B) = \frac{6\ zdarzen\ sprzyjajacych}{10\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Przykład 22.4 *W klasie było 20 uczniów. Każdy uczeń rzucił symetryczną monetą 50 razy. Niżej w tablicy 22.2 podane są częstości wypadnięcia reszki w 100 i 1000 rzutów.*

(22.2)

Tablica

Liczba rzutów	liczba reszek	liczba orłów	częstość	częstość—
n	k	n-k	$\frac{k}{n}$	$\frac{n-k}{n}$—
100	54	46	0.54	0.45—
1000	517	483	0.517—	0.483

Widzimy, że częstość pojawienia się reszki na 100 rzutów monetą równa jest 0.54, natomiast na 1000 rzutów równa jest 0.517. Częstość 0.517 na 1000 rzutów bliższa jest liczbie charakterystyczne równej 0.5 niż częstość 0.54 na 100 rzutów monetą w tym przykładzie.
Ta zaobserwowana prawidłowość polegająca na tym, że częstość zajścia zdarzenia losowego jest "stabilna" około jakiejś stałej wartości, gdy ilość powtórzeń doświadczenia losowego jest duża, leży u podstaw pojęcia prawdopodobieństwa.

Niżej wyjaśnimy jeszcze takie pojęcia jak

- zdarzenia rozłączne - wykluczające
- zdarzenie pewne
- zdarzenie niemożliwe
- prawdopodobieństwo zdarzeń

Dalej oznaczmy literą A zdarzenie pojawienia się reszki, literą B zdarzenia pojawienia się orła w rzucie monetą.
Zdarzenia A i B są rozłączne-wykluczające się, ponieważ zajście zdarzenia A wyklucza zajście zdarzenia B.

Sumę-alternatywę zdarzeń $A\ lub\ B$, piszemy

$$A \cup B$$

Obliczamy częstość alternatywy zdarzeń rozłącznych

$$Czestosc(A \cup B) = Czestosc(A) + Czestosc(B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

Częstość alternatywy zdarzeń rozłącznych A i B równa jest sumie częstości zdarzenia A i zdarzenia B.

Podobnie obliczamy prawdopodobieństwo alternatywy zdarzeń rozłącznych.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Prawdopodobieństwo alternatywy zdarzeń rozłącznych A i B równa jest sumie prawdopodobieństwa zdarzenia A i zdarzenia B.

W rzucie monetą pojawienie się reszki lub orła jest zadarzeniem pewnym, którego prawdopodobieństwo równe jest 1.

Natomiast zdarzenie, że w rzucie monetą nie pojawi się ani reszka ani orzeł jest zdarzeniem niemożliwym.

Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego równe jest 0

Przykład 22.5 *Rozpatrzmy doświadczenie rzutu kostką o kształcie sześcianu foremnego, na którego ścianach są oczka od 1 do 6.*

W doświadczeniu rzutu kostką odczytujemy ilość oczek na kostce. Możliwy jest jeden z sześciu odczytów

$$1\ oczko,\ 2\ oczka,\ 3\ oczka,\ 4\ oczka,\ 5\ oczek\ i\ 6\ oczek$$

następujących zdarzeń elementarnych

zdarzenia ω_1, gdy pojawi się 1 oczko
zdarzenie ω_2, gdy pojawi się 2 oczka
zdarzenie ω_3, gdy pojawi się 3 oczka
zdarzenie ω_4, gdy pojawi się 4 oczka
zdarzenie ω_5, gdy pojawi się 5 oczek
zdarzenie ω_6, gdy pojawi się 6 oczek

Zatem w jednym rzucie kostką jest 6 możliwych wyników

$$1\ oczko,\ 2\ oczka,\ 3\ oczka,\ 4\ oczka,\ 5\ oczek,\ 6\ oczek$$

Szansa pojawienie się każdej ilości oczek jest taka sama w stosunku do 6 wyników możliwych. To prawdopodobieństwo równe $\frac{1}{6}$, piszemy

$$P(\omega_1) = \frac{1}{6}, \qquad P(\omega_2) = \frac{1}{6}$$
$$P(\omega_3) = \frac{1}{6}, \qquad P(\omega_4) = \frac{1}{6}$$
$$P(\omega_5) = \frac{1}{6}, \qquad P(\omega_6) = \frac{1}{6}$$

Załóżmy, że wykonano $N = 100$ rzutów kostką i zapisano liczbę oczek

Zdarzenie ω_1 pojawiło się 17 razy, to znaczy, 1 oczko pojawiło się 17 razy
Zdarzenie ω_2 pojawiło się 16 razy, to znaczy, 2 oczka pojawiło się 16 razy
Zdarzenie ω_3 pojawiło się 17 razy, to znaczy, 3 oczka pojawiło się 17 razy
Zdarzenie ω_4 pojawiło się 18 razy, to znaczy, 4 oczka pojawiło się 18 razy
Zdarzenie ω_5 pojawiło się 15 razy, to zmaczy 5 oczek pojawiło się 15 razy
Zdarzenie ω_6 pojawiło się 17 razy, to znaczy 6 oczek pojawiło się 17 razy

W tym doświadczeniu częstością pojawienia się jednego z sześciu wyników są następujące ilorazy:

$$Czestosc(\omega_1) = \frac{17\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{17}{100} = 0.17$$
$$Czestosc(\omega_2) = \frac{16\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{16}{100} = 0.16$$
$$Czestosc(\omega_3) = \frac{17\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{17}{100} = 0.17$$
$$Czestosc(\omega_4) = \frac{18\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{18}{100} = 0.18$$
$$Czestosc(\omega_5) = \frac{15\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{15}{100} = 0.15$$
$$Czestosc(\omega_6) = \frac{17\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{17}{100} = 0.16$$

Zbiór

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych rozłącznych - wykluczających.

Dlatego alternatywa zdarzeń elementarnych

$$A = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6$$

jest zdarzeniem pewnym.
Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego A równe jest 1, piszemy

$$P(A) = P(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6) = 1$$

Również częstość zdarzenia pewnego równa jest 1, ponieważ równa jest sumie częstości elementarnych

$$Czestosc(\omega) = \frac{17}{100} + \frac{16}{100} + \frac{17}{100} + \frac{18}{100} + \frac{15}{100} + \frac{17}{100} = 1$$

22.3 Zdarzenia jednakowo prawdopodobne

W powyższych doświadczeniach rozpatrywaliśmy zdarzenia losowe jednakowo prawdopodobne. W rzucie monetą pojawienie się orła lub reszki zachodzi z równym prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. W rzucie kostką prawdopodobieństwo pojawienia się

$$1\ oczka,\ 2\ oczek,\ 3\ oczek,\ 4\ oczek,\ 5\ oczek,\ 6\ oczek$$

jest to samo i równe $\frac{1}{6}$.

Niżej podajemy definicje Laplace'a prawdopodobieństwa dla N zdarzeń losowych równoprawdopodobnych

Defimnicja 22.1 *Jeżeli dla danego doświadczenia losowego, zbiór zdarzeń elementarnych składa się z N zdarzeń równoprawdopodobnych, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A równe jest*

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

gdzie n jest ilością zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A.

Rozpatrzymy następujący przykład:

Przykład 22.6 *Z talii 52 karty wyciągnięto losowo jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo $P(A)$ następujących zdarzeń:*

(i) Zdarzenie A polega na wyciągnięciu asa.

(ii) Zdarzenie A polega na wyciągnięciu pika.

(iii) Zdarzenie A polega na wyciągnięciu kiera l lub trefla.

Rozwiązanie (i). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych.
Prawdopodobieństwo wyciągnięcia każdej karty jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii są 4 asy, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia asa jest $n = 4$.
Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcie asa jest równe

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

.

Rozwiązanie (ii). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych, Prawdopodobieńst
wyciągnięcia każdej karty jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii jest 13 pików, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia pika jest $n = 13$. Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcia pika jest równe

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

.

Rozwiązanie (iii). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych.
Prawdopodobieństwo wyciągnięcia każdej karty jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii jest 13 kierów i 13 trefli, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia kiera lub trefla jest

$$n = 13 + 13 = 26$$

Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcie kiera lub trefla jest równe

$$P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

.

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład zdarzeń losowych.

Przykład 22.7 *Na liście w szkole jest 250 dziewcząt i 200 chłopców. Wybrano z listy losowo jedno nazwisko. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A, że to jest*
(a) dziewczynka, (b) chłopiec.

Rozwiązanie (a). Razem na liście jest $250+200 = 450$ uczniów. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{450}\}$$

składa się z jest $N = 450$, zdarzeń. Kaḋe z tych zdarzeń elementarnych $\omega_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots, 450$ polega na wylosowaniu z listy 450 uczniów jedno nazwisko.
Liczba zdarzeń sprzyjających, że to jest dziewczynka równa się $n = 250$. Prawdopodobieństwo, że to jest dziewczynka

$$P(A) = \frac{250}{450} = \frac{5}{9}$$

Rozwiązanie (b). Podobnie obliczamy prawdopodobieństwo wybrania z listy nazwiska chłopca. Razem na liście jest $250 + 200 = 450$ uczniów. Zbiór wszstkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{450}\}$$

składa się z jest $N = 450$, zdarzeń elementarnych. Kaḋe z tych zdarzeń elementarnych $\omega_1,\ i = 1, 2, 3, \cdots, 450$ polega na wylosowaniu z listy 450 uczniów jedno nazwisko.
Liczba zdarzeń sprzyjających, że to jest chłopiec równa się $n = 200$. Prawdopodobieństwo, że to jest chłopiec

$$P(A) = \frac{200}{450} = \frac{4}{9}$$

22.4 Zdarzenia losowe złożone

Alternatywa, koniukcja i różnica zdarzeń losowych jest zdarzeniem losowym złożonym.
Zatem, wykonując te operacje na zbiorze zdarzeń elementarnych, otrzymujemy zdarzenia losowe złożone.
Na przykład, w doświadczeniu z rzutem kostką zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych jest zbiór

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

W tym zbiorze Ω wyróżniamy następujące podzbiory jako zdarzenia złożone:

- Zdarzenie pewne określone przez zbiór

  $$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

  wszystkich zdarzeń elementarnych, którego pradopodobieństwo $P(\Omega) = 1$, ponieważ każde ze zdarzeń elementarnych

  $$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6$$

  sprzyja zdarzeniu pewnemu Ω.
  Przawdopodobieństwo każdego z tych zdarzeń elemntarnych

  $$P(\omega_i) = \frac{1}{6}. \qquad i =, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- oczekiwany wynik zdarzenia A to parzysta ilość oczek. To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli zdarzy się ω_2 lub ω_4 lub ω_6. To znaczy, gdy prawdziwa jest alternatywa

  $$\omega_2 \cup \omega_4 \cup \omega_6$$

Zatem zdarzenie A jest określone przez podzbiór

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$$

zbioru Ω wszystkich zdarzeń elementarnych. Zdarzenia elementarne $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ sprzyjają zajściu zdarzenia A.
Prawdopodobieństwo tego zdarzenia

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- oczekiwany wynik zdarzenia A to ilość oczek mniejsza niż 3.

  To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli wynik rzutu kostką jest jedno oczko lub dwa oczka, gdy prawdziwa jest alternatywa

  $$\omega_1 \cup \omega_2$$

  Zatem zdarzenie A jest określone przez podzbiór

  $$A = \{\omega_1, \omega_2\} \subset \Omega$$

  Zdarzenia elementarne ω_1, ω_2 sprzyjają zdarzeniu A
  Prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia

  $$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- oczekiwany wynik zdarzenia A to ilość oczek większa od 3. To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli zdarzy się ω_4 lub ω_5 lub ω_6, gdy pradziwa jest alternatywa $\omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6$.
  Zatem zdarzenie A jest określone przez podzbiór

  $$A = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \subset \Omega$$

  zbioru Ω wszystkich zdarzeń elementarnych. Każde ze zdarzeń $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ sprzyja zdarzeniu A
  Prawdopodobieństwo tego zdarzenia

  $$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

22.5 Operacje na zdarzeniach losowych

Podstawową relacją w zbiorach jest ralacja przynależności elementu do zbioru.
Relację, że element x należy do zbioru Ω, piszemy $x \in \Omega$. Również relację, że x nie jest elementem zbioru Ω, piszemy $x \notin \Omega$.
Zdarzenia losowe rozumiemy jako podzbiory zbioru zdarzeń elementarnych. Operacje na zbiorach takie jak suma, iloczyn i różnica zbiorów odnoszą się również do działań na zdarzeniach losowych, ponieważ są to działania na podzbiorach zbioru zdarzeń elentarnych.

22.6 Zdarzenie przeciwne

Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A oznaczamy symbolem A'. Zdarzenie przeciwne A' zachodzi, jeżeli nie zaszło zdarzenie losowe A.

Na przykład, niech zdarzenie A polega na uzyskaniu parzystej liczby oczek w rzucie kostką. Wtedy

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$$

jest podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad A \subset \Omega$$

Zdarzenie przeciwne A' zachodzi, jeżeli pojawi się nieparzysta liczba oczek

$$A^{'} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$

Podzbiór $A^{'}$ jest również podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad A^{'} \subset \Omega$$

Zauważmy, że zdarzenie przeciwne równe jest różnicy zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

i wydarzenia A
Zatem mamy

$$A^{'} = \Omega - A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} - \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$

22.7 Alternatywa zdarzeń

Alterternetywą zdarzeń losowych A i B jest zdarzenie

$$C = A \cup B$$

które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A lub zachodzi zdarzenie B.
Na przykład: *niech zdarzeniem A będzie liczba oczek na kostce większa od 5, natomiast zdarzeniem B niech będzie liczba oczek mniejsza od 2.*
Jasne, że zdarzenie

$$A = \omega_6$$

natomiast zdarzenie

$$B = \omega_1$$

Alternatywą tych zdarzeń jest podzbiór

$$C = A \cup B = \{\omega_1, \omega_6\}$$

zbioru zdarzeń elementarnych Ω. Piszemy

$$C = A \cup B \subset \Omega$$

22.8 Koniukcja zdarzeń

Koniukcją zdarzeń losowych A i B jest zdarzenie

$$D = A \cap B,$$

które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A i jednocześnie zachodzi zdarzenie B.

Na przykład, niech zdarzeniem A będzie liczba oczek większa od 3, zdarzeniem B niech będzie liczba oczek mniejsza od 5.
Jasne, że zdarzenie A określa podzbiór

$$A = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \subset \Omega,$$

oraz zdarzeniem B określa podzbiór

$$B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \subset \Omega$$

Koniukcja $A \cap B$ jest zdarzeniem

$$D = A \cap B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \cap \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{\omega_4\}$$

które składa się z tych samych zdarzeń elmentarnych równocześnie należących do A i do B.

22.9 Zdarzenia rozłączne

Zdarzenia A i B wyłączają się, jeżeli ich koniukcja jest zbiorem pustym. To znaczy $A \cap B = \emptyset$.
Niech na przykład, w doświadczeniu rzutem kostką, niech zdarzenie

$$A = \{\omega_1, \omega_6\}$$

oznacza pojawienie się jednego oczka lub sześciu oczek, natomiast zdarzenie

$$B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$

oznacza pojawienie się trzech oczek lub czterech oczek lub pięciu oczek.
Te zdarzenia są rozłączne, gdyż ich koniukcja

$$A \cap B = \{\omega_1, \omega_6\} \cap \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\} = \emptyset$$

jest zbiorem pustym zdarzeń.

22.10 Różnica zdarzeń losowych

Różnica zdarzeń losowych A i B to jest zdarzenie

$$E = A - B$$

zachodzi wtedy gdy zdarzenie A zachodzi, natomiast zdarzenie B nie zachodzi.
Na przykład, niech zdarzeniem A będzie parzysta ilość oczek, natomiast zdarzeniem B niech będzie ilość oczek podzielna przez 3.
Jasne, że zdarzenie A zachodzi, jeżeli wylosujemy element podzbioru

$$\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$$

zbioru Ω
natomiast zdarzenie B nie zachodzi, jeżeli nie wylosujemy elementu podzbioru

$$\{\omega_3, \omega_6\} \subset \Omega$$

zbioru Ω.
Zatem różnica zdarzeń losowych A i B to jest zdarzenie

$$E = A - B$$

zachodzi, jeżeli wylosujemy element podzbioru A i jednocześnie nie wylosujemy elementu podzbioru B. Wtedy zdarzenie

$$E = A - B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} - \{\omega_3, \omega_6\} = \{\omega_2, \omega_4\} \subset \Omega$$

22.11 Przykłady zdarzeń losowych

Niżej podajemy przykłady zdarzeń losowych i zdarzeń sprzyjających określonemu zdarzeniu losowemu. Podajemy również opis operacji: alternatywy i koniukcji zdarzeń losowych oraz prawdopodobieństwo zdarzeń sprzyjających i zdarzeń przeciwnych do danego zdarzenia losowego.

Przykład 22.8 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tego zbioru liczby podzielnej przez 5.

Rozwiązanie (22.8). Zbiór wszystkich zdarzeń możliwych

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

składa się $N = 20$ zdarzeń elementarnych.
Zbiór zdarzeń sprzyjających

$$A = \{5, 10, 15, 20\}$$

składa się z $k = 4$ liczb podzielnych przez 5.
Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 ze zbioru Ω wszystkich możliwych zdarzeń jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru Ω liczby podzielnej przez 5 jest równe $\frac{1}{5}$.

Przykład 22.9 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$$

wybieramy losowo dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb z których co najmniej jedna jest podzielne przez 3.

Rozwiązanie (22.9). W tym przykładzie zdarzeniemi elementarnymi będą wszystkie pary liczb podane w tablicy

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,5), & (1,7), & (1,9), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,5), & (2,7), & (2,9), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,5), & (3,7), & (3,9), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,5), & (5,7), & (5,9), \\ (7,1), & (7,2), & (7,3), & (7,5), & (7,7), & (7,9), \\ (9,1), & (9,2), & (9,3), & (9,5), & (9,7), & (9,9), \end{array} \right\}_{N=6 \times 6}$$

Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych składa się z $N = 36$ zdarzeń możliwych.
Zbiór zdarzeń sprzyjających to są te pary liczb wybrane z tablicy (22.9) w których co

najmniej jedna liczba jest podzielna przez przez 3.
Zatem zbiór zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A określony w tablicy

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} & & (1,3), & & & (1,9) \\ & & (2,3), & & & (2,9), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,5), & (3,7), & (3,9), \\ & & (5,3), & & & (5,9), \\ & & (7,3), & & & (7,9), \\ (9,1), & (9,2), & (9,3), & (9,5), & (9,7), & (9,9), \end{array} \right\}_{k=20}$$

składa się z $k = 20$ par w których co najmniej jedna z liczb jest podzielna przez 3.

Zatem prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ z których co majmnie jedna jest podzielna przez 3 jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Przykład 22.10 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 2 i przez 3.

Rozwiązanie (22.10). Zbiór wszystkich zdarzeń losowych

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

składa się z $N = 20$ zdarzeń losowych elementarnych.
Zbiór zdarzeń losowych sprzyjających zdarzeniu

$$A = \{6, 12, 18\},$$

że wylosowana liczba jest podzielna przez 2 i przez 3, składa się z $k = 3$ liczb.
Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 2 i przez 3 ze zbioru Ω jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{3}{20}$$

Przykład 22.11 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej 6.

Rozwiązanie (22.11). Zbiór wszystkich zdarzeń losowych

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

składa się z $N = 20$ zdarzeń losowych elementarnych.
Zbiór zdarzeń losowych sprzyjających zdarzeniu

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

że wylosowana liczba jest mniejsza od 6, składa się z $k = 5$ liczb.
Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej od 6 ze zbioru Ω jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Przykład 22.12 .
(*i*) *Podaj zbiór zdarzeń wszystkich elementarnych w doświadczeniu rzutem dwoma kostkami.*
(*ii*) *Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A pojawienia się parzystej sumy liczby oczek w rzucie dwiema kostkami.*
(*iii*) *Podaj zdarzenie przeciwne $A^{'}$ do zdarzenia A.*

Rozwiązanie (i) Możliwe są następujące wyniki:

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 1, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub
- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 2, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub
- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 3, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub
- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 4, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub
- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 5, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub
- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 6, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.

Zatem wynikiem tego doświadczenia jest zbiór wszystkich możliwych par zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{llllll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6), \end{array} \right\}_{N=6\times 6}$$

Rozwiązanie (ii). W rzucie dwiema kostkami suma oczek jest parzysta, jeżeli na pierwszej i jednocześnie na drugiej kostce pojawi się parzysta ilość oczek, albo jednocześnie na pierwszej i na drugiej kostce pojawi się nie parzysta ilość oczek. Ponieważ wszystkich zdarzeń elementarnych jest $6 \times 6 = 36$, to zbiór zdarzeń sprzyjających

$$\omega = \left\{ \begin{array}{lll} (1,1), & (1,3), & (1,5), \\ (2,2), & (2,4), & (2,6), \\ (3,1), & (3,3), & (3,5), \\ (4,2), & (4,4), & (4,6), \\ (5,1), & (5,4), & (5,5), \\ (6,2), & (6,4), & (6,6), \end{array} \right\}$$

ma $\frac{36}{2} = 18$ elementy. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenie A, że w sumie wypadnie parzysta ilość oczek jest równe

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie (iii). Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A w rzucie dwiema kostkami będzie nie parzysta suma oczek. To znaczy, że na pierwszej kostce pojawi się nieparzysta liczba oczek, natomiast na drugiej kostce pojawi się parzysta ilość oczek, albo odwrotnie, na pierwszej kostce pojawi się parzysta ilość oczek, natomiast na drugiej kostce pojawi się nie parzysta liczba oczek. Zbiór zdarzeń sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu

$$\omega^{'} = \Omega - \omega = \left\{ \begin{array}{lll} (1,2), & (1,4), & (1,6), \\ (2,1), & (2,3), & (2,5), \\ (3,2), & (3,4), & (3,6), \\ (4,1), & (4,3), & (4,5), \\ (5,2), & (5,4), & (5,6), \\ (6,1), & (6,3), & (6,5), \end{array} \right\}$$

Ponieważ wszystkich zdarzeń elementarnych jest $6 \times 6 = 36$, to zdarzeń sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu jest $\frac{36}{2} = 18$.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego $A^{'}$, że w sumie wypadnie nie parzysta ilość oczek jest równe

$$P(A^{'}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Przykład 22.13 *Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w totolotku ze zbioru liczb* $\{1, 2, ..., 49\}$ *(i) sześciu liczb, (ii) piętciu liczb, bez powtórzeń.*

Rozwiązanie (i). Najpierw ustalmy zbiór zdarzeń elementarnych. Intuicyjnie jasne, że zdarzeniem elementarnym będzie sześć liczb

$$\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$$

wybranych losowo ze zbioru liczb $\{1, 2, ..., 49\}$.

Pytanie ile będzie różnych szóstek ze zbioru 49-ciu liczb?.
Rozumiemy, że dwie szóstki są różne, jeżeli różnią się co najmiej jedną liczbą. Prostą odpowiedź na to pytanie znajdujemy w kombinatoryce. Mianowicie, ilość różnych szóstek równa jest ilości kombinacji z 49-ciu liczb po sześć liczb. Tą liczbę kombinacji określamy wzorem

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! * (49-6)!} = \frac{49!}{6! * 43!} = 13983816$$

Zatem, zbiór wszystkich kombinacji $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ sześciu liczb wybranych z 49-ciu liczb

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych.
Odpowiedź: Niech $A \in \Omega$ oznacza zdarzenie wylosowania sześciu liczb ze zbioru

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 48, 49\}$$

Tylko jedna szóstka liczb wygrywa. która sprzyja zdarzeniu A. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{1}{13983816}$$

Rozwiązanie (ii). Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Wiemy z rozwiązania (i), że zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

zawiera $\binom{49}{6} = 13983816$ elementów.
Oznaczmy przez A zdarzenie, że gracz wytypował liczby $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ wśród których pięć liczby są trafione. To znaczy, że w tym zbiorze liczb

$$\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$$

pięć liczb są ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$.
Teraz policzmy ile jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Najpierw, zuważmy, że jedną liczbą nie trafioną może być k_1 lub k_2 lub k_3 lub k_4 lub k_5 lub k_6. Zatem, jedną z pięciu liczb trafionych możemy zastąpić liczbą nie trafioną otrzymując inną piątkę liczb trafionych. Taką zamianę można dokonać na $\binom{6}{1} = 6$ sześć sposobów.
W ten sposób znajdujemy sześć różnych szóstek jako zdzarzenia sprzyjających zdarzeniu A. Ponadto, pozostało 43 liczby nie zo stały wylosowane w totolotka. Każdą z tych 43 nie wytypowanych w grze można wymienić na jedną z sześciu nie trafionych przez gracza. Zatem, zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A wylosowania poprawnych pięciu liczba jest $6 * 43 = 258$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wylosowania poprawnych 5 liczby z wylosowanych sześciu liczb równe jest

$$P(A) = \frac{258}{13983816} = 0.00001845$$

22.12 Zadania

Zadanie 22.1 .
(*i*) *Wykonaj 50 rzutów monetą i policz ilość reszek w* 10, 20, 30, 40 *i* 50 *rzutach. Oblicz czętości pojawienia się reszki i orła dla* 10, 20, 30, 40 *i* 50 *rzutów monetą.*
(*ii*) *Wskaż liczbę charakterystyczną dla tego doświadczenia około której stabilizują się obliczone częstości.*

Zadanie 22.2 *Wykonaj 10 rzutów dwoma jednakowymi monetami.*
(*i*) *Oblicz częstość pojawienia się dwóch orlów w 10 rzutach.*
(*ii*) *Oblicz częstość pojawienia się orła i reszki w 10 rzutach.*

Zadanie 22.3 *Rozpatrz model probabilistyczny rzutu dwoma monetami jeden raz.*
(*i*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch orlów.*
(*ii*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się orła i reszki.*

Zadanie 22.4 *Wykonaj 10 rzutów dwoma kostkami.*
(*i*) *Oblicz częstość pojawienia się dwóch takich samych oczek.*
(*ii*) *Oblicz częstość pojawienia się oczek, których suma równa jest 4.*
(*iii*) *Oblicz częstość pojawienia się oczek, których suma równa jest 7.*

Zadanie 22.5 *Rozpatrz model probabilistyczny rzutu dwoma kostkami sześciennymi jeden raz.*
(*i*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch takich samych ilości oczek.*
(*ii*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się ilości oczek, których suma równa jest 4.*
(*iii*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się ilości oczek, których suma równa jest 12.*

Zadanie 22.6 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 4.

Zadanie 22.7 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo dwie liczby, bez powtórzeń. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 lub 4.

Zadanie 22.8 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3 i przez 4.

Zadanie 22.9 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej 5.

Zadanie 22.10 *Zbiór zdarzeń elementarnych*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

(*i*) *Oblicz alternatywę i koniukcję zdarzeń losowych złożonych*

$$A = \{\omega_1, \omega_6\}, \qquad B = \{\omega_2, \omega_6\}$$

(*ii*) *Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A i zdarzenia B.*
(*iii*) *Znajdź zdarzenia przeciwne $A^{'}$ i $B^{'}$ do zdarzeń losowych A i B.*
(*iv*) *Oblicz prawdopodobieństwa zcdarzeń losowych przeciwnych $A^{'}$ i $B^{'}$.*

Zadanie 22.11 *Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w grze liczbowej ze zbioru liczb* $\{1, 2, ..., 20\}$ *(i) pięciu liczb, (ii) czterech liczb, bez powtórzeń.*

22.13 Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Laplace'a definicja prawdopodobieństwa jako iloraz n zdarzeń sprzyjających zdarzeniu losowemu A do ilości N wszystkich zdarzeń elementarnych, w istocie ma swoje uzasadnienie w zbiorze zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych. Mianowicie, jeżeli wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne, to znaczy, że pierwsze zdarzenie elementarne pojawia się z prawdopodobieństwem p_1, drugie z prawdopodobieństwem p_2, i tak dalej oraz $N-te$ zdarzenie elementarne pojawia się zprawdopodobieństwem p_N i te prawdopodobieństwa są równe

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_N = p,$$

wtedy

$$p = 1 \quad i \quad p = \frac{1}{N}$$

Skąd otrzymamy prawdopodobieństwo jako iloraz n zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A do wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

Bardziej ogólnym modelem prawdopodobieństwa jest definicja aksjomatyczna, która obejmuje również zbiór zdarzenia elementarnych różno prawdopodobnych.

Defimnicja 22.2 *Oznaczmy przez Ω zbiór zdarzeń elementarnych. Prawdopodobieństwem zdarzenia losowogo $A \in \Omega$ nazywamy funkcje rzeczywistą $P(A)$, która spełnia nastepujące warunki:*

(a) $P(A) \geq 0$, *dla każdego zdaerzenia* $A \in \Omega$.

(b) Dla każdej pary wyłączającej się zdarzeń losowych $A, B \in \Omega$ *zachodzi równość;* $P(A \cup B) = P(A) + P(B), 49 - ciuliczb$

(c) $P(\omega_1) = 1$.

Przykład 22.14 *Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w totolotku ze zbioru liczb* $\{1, 2, ..., 49\}$ *(i) sześciu liczb, (ii) piętciu liczb, (iii) czterech liczb*

Rozwiązanie (i). Najpierw ustalmy zbiór zdarzeń elementarnych. Intuicyjnie jasne, że zdarzeniem elementarnym będzie sześć liczb $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ wybranych losowo ze zbioru liczb $\{1, 2, ..., 49\}$, to znaczy $n_i \in \{1, 2, ..., 49\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Pytanie ile będzie różnych szóstek ze zbioru 49-ciu liczb?. Rozumiemy, że dwie szóstki są różne, jeżeli rożnią się co najmiej jedną liczbą. Prostą odpowiedź na to pytanie znajdujemy w kombinatoryce. Mianowicie, ilość różnych szóstek równa jest ilości kombinacji z 49-ciu liczb po sześć liczb. Tą liczbę kombinacji określamy symbolem Newtona

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! * (49-6)!} = \frac{49!}{6! * 43!} = 13983816$$

Zatem, zbiór wszystkich kombinacji $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ sześciu liczb wybranych z 49-ciu liczb

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49, \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych.
Odpowiedź: Niech $A \in \Omega$ oznacza zdarzenie wylosowania sześciu liczb ze zbiru Ω. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia równe jest

$$P(A) = \frac{1}{13983816}$$

Zauważmy, że zgodnie z aksomatyczną definicją prawdopodobieństw funkcja $P(A)$ określona na zbiorze zdarzeń elementarnych Ω spełnia warunki definicji. Mianowicie, mamy

(a) $P(A) = \dfrac{1}{13983816} \geq 0$, dla każdego zdarzenia $A \in \Omega$. Wszystkie zdarzenia elementarne są równo-prawdopodobne.

(b) Dla każdej pary wyłączającej się zdarzeń losowych $A, B \in \Omega$, jeżeli zdarzenie A zachodzi to zdarzenie B nie zachodzi.
Wtedy
$$P(A) = \frac{1}{13983816}, \quad \text{oraz} \quad P(B) = 0.$$
Zatem, mamy równość;
$$P(A \cup B) = \frac{1}{13983816} + 0 = P(A) + P(B)$$
Podobnie, lub jeżeli zdarzenie B zachodzi to zdarzenie A nie zachodzi.
Wtedy
$$P(A) = 0, \quad \text{oraz} \quad P(B) = \frac{1}{13983816}.$$
Zatem, mamy równość:
$$P(A \cup B) = 0 + \frac{1}{13983816} = P(A) + P(B)$$

(c) Jeżeli wybierzemy wszystkie możliwe szóstki, to wśród nich pojawi się napewno losowana szóstka. To znaczy, że prawdopodobieństwo od wszystkich zdarzeń elementarnych $P(\Omega) = 1$.

Rozwiązanie (ii). Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Wiemy z rozwiązania (i), że zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

zawiera $\binom{49}{6} = 13983816$ elementów.
Oznaczmy przez A zdarzenie, że gracz wytypował liczby $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ wśród których pięć liczb jest trafnych. To znaczy, że w tym zbiorze liczb $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ cztery liczby jest ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$. Teraz policzmy ile jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Najpierw, zuważmy, że jedną liczbą nie trafioną może być k_1 lub k_2 lub k_3 lub k_4 lub k_5 lub k_6. Zatem, jedną z pięciu liczb trafionych możemy zastąpić liczbą nie trafioną otrzymując inną piątkę liczb trafionych. Taką zamianę można dokonać na $\binom{6}{1} = 6$ sześć sposobów. W ten sposób znajdujemy sześć różnych szóstek jako zdzarzenia sprzyjających zdarzeniu A. Ponadto, pozostało 43 liczby nie wylosowane w totolotka. Każdą z tych 43 nie wytypowanych w grze można wymienić na jedną z sześciu nie trafionych przez gracza. Zatem, zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A wylosowania poprawnych pięciu liczba jest $6 * 43 = 258$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wylosowania poprawnych 5 liczby z wylosowanych sześciu liczb równe jest
$$P(A) = \frac{258}{13983816} = 0.00001845$$

Rozwiązanie (iii). Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Wiemy z rozwiązania (i), że zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

zawiera $\binom{49}{6} = 13983816$ elementów.
Oznaczmy przez A zdarzenie, że gracz wytypował liczby $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ wśród których cztery liczby jest trafne. To znaczy, że w tym zbiorze liczb $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ cztery liczby jest ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$. Teraz policzmy ile jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Najpierw, zuważmy, że dwie liczby nie trafione to mogą być pary k_1, k_2 lub k_1, k_3 lub ...., lub k_4, k_5 lub ...,lub k_5, k_6 Ilość tych par równa jest $\binom{6}{2} = 15$. Zatem, dwie z czterech liczb trafionych możemy zastąpić liczbami wylosowanymi w totolotku, ale nie trafionionymi przez gracza. W ten sposób otrzymujemy inną czwórkę liczb trafionych. Taką zamianę można dokonać na $\binom{6}{2} = 15$ pietnaście sposobów. W ten sposób otrzymujemy 15 różnych czwórek jako zdzarzenia sprzyjających zdarzeniu A. Ponadto, pozostało 43 liczby nie wylosowane w totolotka. Każde dwie liczby z tych 43 nie wytypowanych w grze można wymienić na $\binom{43}{2} = 21 * 43$ sposobów na dwie liczby nie trafionych przez gracza. Zatem, zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A wylosowania poprawnych czterech liczba jest $15 * 21 * 43 = 13545$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wylosowania poprawnych czterech liczb z wylosowanych sześciu liczb równe jest

$$P(A) = \frac{13545}{1398316} = 0.000969$$

Zadanie 22.12 *Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Gracz wytypowł sześć liczb $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz trafił tylko w trzy liczby ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$, sześciu liczb, pozostałe trzy liczby były nie trafione.*

22.14 Prawdopodobeństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia dowolnego zdarzenia A pod warunkiem, że już zaszło zdarzenie B oznaczamy symbolem $P(A|B)$ i definiujemy wzorem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{gdy} \quad P(B) > 0.$$

Powyżesze określenie prawdopodobieństwa warunkowego wyjaśniamy na następującym przykładzie:

Przykład 22.15 *W stadzie jest razem N owiec i baranów. Wiadomo, że ilość owiec i baranów jest następująca:*

- *m baranów*
- *k baranów białych.*
- *razem białych owiec i baranów jest n, $k \leq n$.*

Niech A oznacza zdarzenie, że losowo wybrany czworonogi jest biały, natomiast niech B oznacza zdarzenie, że wybrany losowo czworonogi jest baranem. Zakładając, że prawdopodobieństwo wyboru każdego czworonogiego owcy czy barana jest to samo. Wtedy obliczamy łatwo następujące prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{n}{N}, \qquad P(B) = \frac{m}{N}, \qquad P(A \cap B) = \frac{k}{N}$$

Wybierając losowo białego barana pytamy o warunkowe prawdopodobieństwo $P(A|B)$. To warunkowe prawdopodobeństwo wylosowania białego barana jest równe

$$P(A|B) = \frac{k}{m}$$

Skąd otrzymamy następujący wzór:

$$P(A|B) = \frac{k}{m} = \frac{\frac{k}{N}}{\frac{m}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Zgodnie z definicją, powyższy wzór określa warunkowe prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, gdy $P(B) > 0$.

22.15 Prawdopodobieństwo całkowite

Aby wprowadzić pojęcie prawdopodobieństwa całkowitego posłużymy się następującym przykładem:

Przykład 22.16 *Przypuśćmy, że jakaś fabryka produjkująca żarówki ma wadliwość 5 żarówek na 100 wyprodukowanych. Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana żarówka z tej fabryki jest wadliwa wynosi* 0.05. *Przypuśćmy teraz , że zainstalowano w tej fabryce nową linię produkcji, która produkuje tylko 1 żarówkę wadliwą na 100 wyprodukowanych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana żarówka z tej fabryki jest wadliwa?*

Interesujące prawdopodobieństwo to tak zwane prawdopodobieństwo całkowite. Gdyby nowa linia produkcji produkowała tyle samo żarówek co stara linia produkcyjna, to prawdopodobieństwo całkowite powinno być równe średniej wadliwości, to znaczy $\frac{1}{2}(0.05 + 0.01) = 0.03$. Oczywistście zakładamy, że żarówki wyprodukowane przez obie linie produkcyjne zostały dokładnie wymieszane.. Odpowiedź na pytanie w tym przykładzie wynika z następującego twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym

Twierdzenie 22.1 *Jeżeli zdarzenia* $B_1, B_2, ..., B_n$ *wyłaczają się parami i ich parwdopodobieństwa* $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, ...n$. *Ponadto, jeżeli alternatywa tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, to znaczy* $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$, *to dla każdego zdarzenia losowego* $A \subset \Omega$ *z przestrzeni zdarzeń elementarnych* Ω, *zachodzi następujący wzór:*

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \cdots + P(B_n)P(A/B_n)$$

Stosując to twierdzenie do opisanego wyżej przykładu, załóżmy, że nowa linia produkcyjna produkuje trzy razy więcej żarówek niż stara linia produkcyjna. Oznaczmy przez A interesujące nas zdarzenie losowe, że wybrana żarówka jest wadliwa. Również oznaczmy przez B_1 i B_2 zdarzenia, że losowo wybrana żarówka została wyprodukowana na starej lini produkcyjnej i nowej lini produkcyjnej, odpowiednio. Stosując twierdzenie o całkowitym prawdopodobieństwie, sprawdzamy założenia tego twierdzenia. Po pierwsze, widzimy że zdarzenia B_1 i B_2 są rozłączne. Po drugie,żadne z tych zdarzeń nie jest zdarzeniem niemożliwym, czyli prawdopodobieństwa ich zajścia są dodatnie, $P(B_1) > 0$ i $P(B_2) > 0$. Następnie, alternatywa tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, to znaczy $B_1 \cup B_2 = \Omega$.
Z treści przykładu wynika, że

- $P(B_1) = 0.3$,
- $P(B_2) = 0.7$.

oraz, że dane prawdopodobieństwa warunkowe są następujące:

- $P(A/B_1) = 0.05$,
- $P(A/B_2) = 0.01$.

Z tezy twierdzenia wynika

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B2)P(A/B_2) = 0.3 * 0.05 + 0.7 * 0.01 = 0.036$$

Zatem średnio 36 żarówek na 1000 żarówek wyprodukowanych w fabryce to są żarówki wadliwe.
Zauważmy, że jeżeli obie linie produkcyjne produkują tą samą ilość żarówek, wtedy prawdopodobieństwa B_1 i B_2 są równe

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$$

i prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B2)P(A/B_2) = \frac{1}{2}(0.05 + 0.01) = 0.03$$

Rozpatrzmy inny przykład.

Przykład 22.17 *Powiedzmy, że stan pogody dla Warszawy w miesiącu kwietniu można schrakteryzować za pomocą jednego z trzech typów pogody I, II, III. Z długotrwałych obserwacji wywnioskowano, że prawdopodobieństwa tego, że w wybranym losowo dniu kwietnia będzie określony typ pogody są odpowiednio równe:* 0.2, 0.1, 0.7. *Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że w losowo wybranym dniu kwietnia będzie padał deszcz.*

Oznaczmy przez B_1, B_2, B_3 zdarzenia polegają na tym, że w losowo wybranym dniu kwietnia wystąpi odpowiednio I-szy lub II-gi, lub 3-ci typ pogody. Oznaczmy przez A interesujące nas zdarzenie, że w losowo wybranym dniu kwietnia będzie padał deszcz.
Teraz sprawdzamy założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.
Po pierwsze zauważamy, że zdarzenia B_1, B_2, i B_3 są parami rozłączne. To znaczy, że koniukcja tych par zdarzeń jest zbiorem pustym $\emptyset$

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad B_1 \cap B_3 = \emptyset, \quad B_2 \cap B_3 = \emptyset$$

Po drugie, prawdopodobieństwa zdarzeń $P(B_1) > 0$, $P(B_2) > 0$, $P(B_3) > 0$ są dodatnie.
Po trzecie alternatywa zdarzeń

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$$

jest zdarzeniem pewnym.
Z treści tego przykładu mamy dla losowo wybranego dnia kwietnia prawdopodobieństwa pojawienia się typu pogody

- $P(B_1) = 0.2$
- $P(B_2) = 0.1$
- $P(B_3) = 0.7$

oraz prawdopodobieństwa warukowe

- $P(A/B_1) = 0.9$
- $P(A/B_2) = 0.8$
- $P(A/B_3) = 0.15$

Z tezy twerdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym obliczamy prawdopodobieństwo interesującego nas zdarzenia A :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3) \\ &= 0.2 * 0.9 + 0.1 * 0.8 + 0.7 * 0.15 = 0.445 \end{aligned}$$

pojawienia się orła i rszki

22.16 Zadania

Zadanie 22.13 *W rzucie monnetą 100 razy orzeł pojawił się 45 razy a reszka pojawiła się 55 razy oblicz częstości pojawienia orłów i reszek*

Zadanie 22.14 *Doświadczenie losowe polega na rzucie dwoma monnetami. Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się równocześnie dwóch orłów w 50 rzutach.*

Zadanie 22.15 *Doświadczenie losowe polega na rzucie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się sumy oczek równej 4 w 100 rzutach.*

Zadanie 22.16 *Wygrana w grze liczbowej polega na wylosowaniu czterech liczb z czterdziestu liczb od 1 do 40. Oblicz prawpodobieństwo wygranej.*