O LICZBACH NATURALNYCH, CAŁKOWITYCH i WYMIERNYCH ALGEBRAICZNYCH, PRZSTĘPNYCH i RZECZYWISTYCH

Tadeusz STYŠ

Szkoła Podstawowa Heliantus
02-892 Warszawa
ul. Bażancia 16

Wstęp W starożytnych kulturach Egiptu i Grecji (Szkoła Pitagorejska 569-500 p.n.e. Uniwersytet Aleksandryjski, Euklides 330-275 p.n.e.) liczby były uważene jako boskie istoty, kt̀ore mają wielki wpływ na życie ziemskie.
Od około 5-ciu tysięcy lat p.n.e. przez czasy babilońskie do pierwszego tysiąclecia p.n.e. używano symboli liczb w zapisie obrazkowym.
Obecnie, powszechnie używane cyfry

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

najpierw zostały wprowadzone w Indiach. Po podboju Indii przez Arab̀ow w VII wieku n.e. Arabowie zapożyczyli cyfry hinduskie. W wiekach wczesno średnich cyfry pochodzenia hinduskiego zostały wprowadzone w Europie, prawdopodobnie pierwszy raz użyte przez Fibonacciego około roku 1150.

0.1 Liczby naturalne

Koncepcja liczb naturalnych i proste operacje arytmetyczne były znane już od około 50 tysięcy lat temu. To wiemy na podstawie archeologicznych i historycznych odkryċ.
Natomiast pierwszy systematyczny opis arytmetyki liczb naturalnych opracowany został przez starożytnych grek̀ow w szkole Jońskiej Talesa, (625-545 p.n.e.), w szkole Pitagorejskiej (569-475 p.n.e.), na uniwersytecie w Aleksandrii przez Euklidesa (330-2675 p.n.e.) i przez Archmedesa z Syrakus (287-212 p.n.e.)
Teoria liczb jest w dalszym ciągu inspirującym przedmiotem licznych prac publikowanych w wiodących pisamach poświęconych teorii liczb. W ostatnich kilkudziesięciu latach obserwuje się szerokie zastosowania teorii liczb w projektowaniu system̀ow komputerowych w kryptografii i ochronie danych oraz w tworzeniu nowych algorytm̀ow dla potrzeb administracji i program̀ow społecznych.

Zbiór liczb naturalnych dodatnich oznaczmy symbolem

$$N_+ = \{1, 2, 3, ..., n, ...\} \tag{1}$$

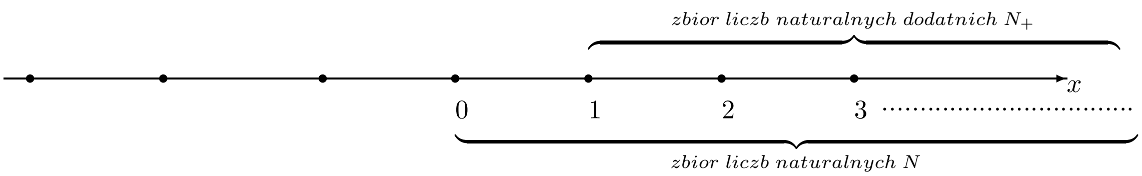
Umownie do zbioru liczb naturalnych zalicza się zero. Wtedy zbiór liczb naturalnych oznaczamy symbolem

$$N = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} \tag{2}$$

Jasne, że zbìor liczb naturalnych dodatnich N_+ zawarty jest w zbiorze liczb naturalnych N nieujemnych, piszemy

$$N_+ \subset N$$

Niżej na osi liczbowej zaznaczone zostały zbior N_+ liczb naturalnych dodatnich i N liczb naturalnych nieujemnych



Oś liczbowa. Liczby naturalne

Suma liczb naturalnych $m+n$ też jest liczbą naturalną. Zatem dla dowolnych liczb naturalnych $m,n \in N$ ich suma

$$m+n \in N$$

należy do zbioru liczb naturalnych.
To znaczy że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na operacje dodawania.
Na przykład dla $m = 7,\ n = 5$, mamy

$$m+n = 7+5 = 12 \in N$$

jest liczbą naturalną.
Operacja dodawania jest przemienna dla dowolnych liczb naturalnych m,n suma

$$m+n = n+m$$

Na przykład $5+3 = 3+5 = 8 \in N$.
Podobnie zbiòr liczb naturalnycj jest zamknięty na operacje mnożenia oraz operacja mnożenia jest przemienna
Mianowiciw, iloczyn liczb naturalnych $m * n$ jest liczbą naturalną.
Zatem dla dowolnych liczb naturalnych $m,n \in N$ ich iloczyn

$$m * n \in N$$

należy do zbioru liczb naturalnych.
To znaczy że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na operacje mnożenia.
Na przykład dla $m = 7,\ n = 5$ mamy

$$m * n = 7 * 5 = 35 \in N$$

jest liczbą naturalną. Operacja mnożenia jest przemienna dla dowolnych liczb naturalnych m,n iloczyn

$$m * n = n * m$$

Natomiast, wynik odejmowania liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną.
Na przykład, ròżnica liczb

$$3-5$$

nie jest liczbą naturalną, ale ròżnica $3-5 = -2$ jest liczbą całkowitą. Liczby całkowite omòwimy w następnym paragrafie.

0.1.1 Przykłady

Przykład 0.1 *Oblicz sumę kolejnych* 10 *liczb naturalnych*

$$S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami ròwności, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_{10} & = & 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \\ S_{10} & = & 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 \\ --- & ... & ------------------ \\ 2*S_{10} & = & \underbrace{11+11+11+11+11+11+11+11+11+11}_{10\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{10} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{10} = 10 * 11 : 2 = 55$$

Przykład 0.2 *Podaj wzòr ogòlny na sumę n kolejnych liczb naturalnych*

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy ròwności stronami, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_n & = & 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n \\ S_n & = & n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1 \\ --- & ... & ------------------ \\ 2*S_n & = & \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_n.

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{10}

$$S_{10} = \frac{10 * 11}{2} = 55$$

0.2 Liczebniki

Przyporządkowując liczbom naturalnym symbole $1, 2, 3, 4, ... :$ i ich nazwy jeden, dwa, trzy, cztery,...; tworzymy zbiòr liczebnikòw. Liczbniki używamy do liczenia elementòw zbioròw jak zbiòr jabłek na jabłoni, zbiòr liści na wierzbie, zbiòr ryb wstawie itp. Oczywiście używamy tylko skończoną ilość nazw liczebników, to znaczy tyle ile potrzebujemy. Pozostałe, bardzo duże liczebniki bez nazw, używane w fizyce i w astronomii, piszemy w postaci potęgi 10^m, gdzie m oznacza liczbę naturalną, to znaczy wykładnik potęgi.

1 *jeden*,	10^0
10 *dziesiec*, 1 *zero*	10^1
100 *sto*, 2 *zera*	10^2
1000 *tysiac*, 3 *zera*	10^3
10 000 *dziesiec tysiecy*, 4 *zera*	10^4
100 000 *sto tysiecy*, 5 *zer*	10^5
1000 000 *milion*, 6 *zer*	10^6
1000 000 000 *miliard*, 9 *zer*	10^9
1000 000 000 000 *bilion*, 12 *zer*	10^{12}
1000 000 000 000 000 000 *trilion*, 18 *zer*	10^{18}
1000 000 000 000 000 000 000 000 *kwadrilion*, 24 *zer*	10^{24}

0.3 Liczby całkowite

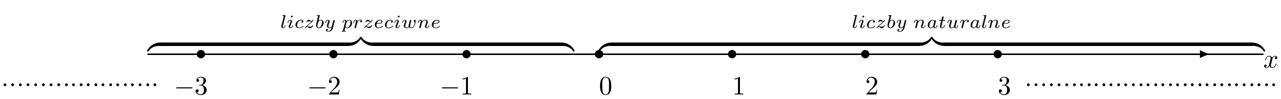
Jak wcześniej zauważyliśmy rȯżnica dwȯch liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną. Rozszerzając zbiȯr liczb naturalnych o liczby przeciwne do liczb naturalnych otrzymamy zbiȯr wszystkich liczb całkowitych.
Mianowicie, liczbami przeciwnymi nazywamy dwie liczby leżące na osi liczbowej w tej samej odległości od zera, ale po przeciwnych stronach zera.
Liczby przeciwne mają tą własność, że ich suma wynosi 0.
Zatem liczba $-m$ jest przeciwna do liczby m wtedy ich suma rȯwna jest zero, piszemy

$$-m+m=0$$

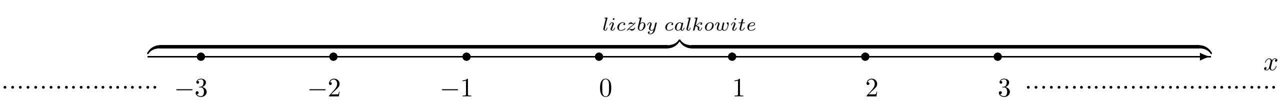
Na przykład

$$dla\, m=7,\ \ liczba\, przeciwna\ -m=-7, \quad wtedy\ \ -7+7=0$$

Na osi liczbowej mamy zaznaczone liczby naturalne po prawej stronie zera, a po lewej stronie zera mamy zanaczone liczby przeciwne do liczb naturalnych.



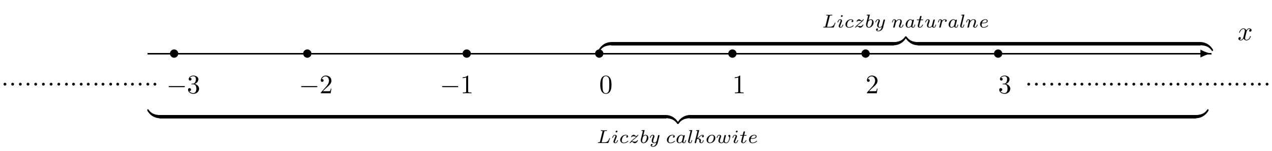
Niżej na osi liczbowej zaznacze są liczby całkowite



Wszystkie liczby naturalne razem ze wszystkimi liczbami do nich przeciwnymi tworzą zbiȯr liczb całkowitych
Zbiȯr liczb całkowitych oznaczamy literą C, piszemy

$$C=\{......................-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.........................\}$$

Liczby naturalne i liczby całkowite zaznaczamy na osi liczbowej



Liczby wymierne. Liczby wymierne to ułamki, na przykład:

$$..........-\frac{5}{2},\ -\frac{4}{3},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{-1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{3},\ -\frac{5}{2},............................$$

Ogólnym wzorem ułamki zwykłe piszemy

$$\frac{p}{q},$$

dla całkowitych $p = 0, \mp 1, \mp 2, \mp, 3, ...;\ \ i\ \ q = \mp 1, \mp 2, \mp, 3, ...; ,\quad q \neq 0.$

Zbiór wszystkich liczb wymiernych oznaczamy symbolem

$$W = \{\frac{p}{q}: \qquad dla \quad calkowitych\, liczb \quad p \ \ i \ \ q, \quad q \neq 0.\}$$

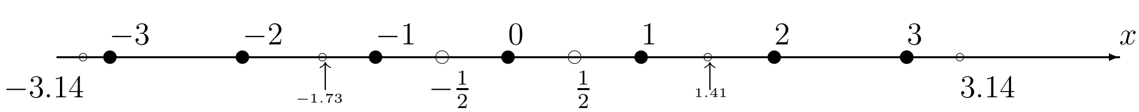
Okazuje się, że liczb wymiernych, czyli ułamków, jest tyle samo co liczb naturalnych, to znaczy nieskończenie dużo. Mówimy, że zbiór liczb wymiernych W jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych N_+.
Zauważmy, że pomiędzy dwoma dowolnymi liczbami wymiernymi $w_1 < w_2$ zawsze są liczby wymierne. Na przykład ich średnia arytmetycza

$$\frac{w_1 + w_2}{2}$$

spełnia nierówność

$$w_1 \leq \frac{w_1 + w_2}{2} \leq w_2$$

Mówimy, że zbiór liczb wymiernych jest wszędzie gęsty.
Niżej na osi liczbowej zostały zaznaczone liczby całkowite, niektóre liczby wymierne, to znaczy ułamki zwykłe i ułamki dziesiętne.



0.4 Liczby niewymierne i liczby przestępne

Przypominamy, że liczbami wymiernymi nazywamy wszystkie ułamki postaci

$$\frac{p}{q}, \quad dla\ calkowitych\ p\ i\ q, \quad q \neq 0$$

Powstaje pytanie czy poza ułamkami istnieją inne liczby, których nie można zapisać w postaci ułamka zwykłego. Odpowiedź jest pozytawna tak.
Mianowicie, liczby x takiej, że

$$x^2 = 2$$

nie można zapisać w postaci ułamka zwykłego.
Zauważmy, że w zbiorze liczb wymiernych

$$W = \{\frac{p}{q} \quad dla\ \ wszystkich\ liczb\ calkowitych\ \ p\ \ i\ \ q, \quad q \neq 0\}$$

nie zawsze jest wykonalna operacja odwrotna do operacji potęgowania.
Na przykład, nie ma liczby wymiernej x, której kwadrat równy byłby 2.
Inaczej równanie

$$x^2 = 2$$

nie ma rozwiązania w zbiorze liczb wymiernych.
Istotnie, gdyby istniała liczba wymierna

$$x = \frac{p}{q}, \ q \neq 0,$$

o największym wspólnym dzielniku $NWD(p,q) = 1$ to ta liczba wymierna byłaby rozwiązaniem równania

$$(\frac{p}{q})^2 = 2, \qquad i \quad p^2 = 2q^2.$$

Wtedy liczba całkowita p byłaby liczbą parzystą, to znaczy $p = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej k. W tym przypadku liczba q musiałaby być również liczbą parzystą, to znaczy

$$q = 2s$$

dla pewnego całkowitego s.
W konsekwencji mamy nierówność $NWD(p,q) >= 2$, która przeczy istnieniu liczby wymiernej w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, w którym największy wspólny dzielnik licznika p i mianownika q, $NWD(p,q) = 1$.

Wiadomo, że liczb wymiernych, czyli ułmków zwykłych, jest tyle samo co liczb naturalnych. Natomiast liczb niewymiernych jest istotnie dużo więcej niż liczb wymiernych. To znaczy że liczb niewymiernych nie można policzyć, gdyż do ich policzenia zabrakłoby liczb naturalnych.
Liczby Algebraiczne Intersującym zbiorem liczb są liczby algebraiczne, których definicje podajemy niżej.

Definicja 0.1 *Liczbami algebraicznymi nazywamy wszystkie pierwiastki wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych. Toznaczy, że każdy pierwiastek wielomianu*

$$w_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

o współczynnikach $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ *całkowitych jest liczbą algebraiczną*

Na przykład, wielomian kwadratowy stopnia $n = 2$

$$w_2(x) = x^2 - 2, \qquad -\infty < x < \infty$$

o współczynnikach $a_2 = 1,\ a_1 = 0,\ a_0 = -2$ ma dwa pierwiastki $x_1 = \sqrt{2}$ i $x_2 = -\sqrt{2}$.

Jak wiemy pierwiaski $\sqrt{2},\ -\sqrt{2}$ nie są liczbami wymiernymi, natomiast są liczbami algebraicznymi.

Zauważmy, że wszystkie l;iczby wymierne są jednocześnie liczbami algebraicznymi. Istotnie, niech dane będą liczby wymiernymi w postaci ułamków zwykłych

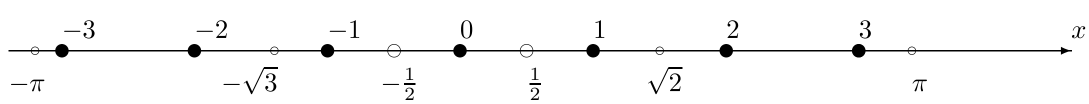
$$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_3}{q_3}, ..., \frac{p_n}{q_n}$$

dla liczb całkowitych $p_1, p_2, ...p_n\ \ i\ \ q_1, q_2, q_3, ..., q_n$
Wtedy te liczby wymierne są pierwiastkami wielomianu

$$w_n(x) = (x - \frac{p_1}{q_1})(x - \frac{p_2}{q_2})(x - \frac{p_3}{q_3})...(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}})(x_n - \frac{p_n}{q_n})$$

o współczynnikach całkowitych.
Zatem zbiòr liczb algebraicznych zawiera wszystkie liczby wymierne i liczby algebraiczne.[1]
Liczby przestępne. Liczby przestępne to takie liczby, które nie są pierwiastkami wielomianu o współczynnikach całkowitych. To znaczy nie są liczbami algebraicznymi, a tym samym nie są liczbami wymiernymi. Na przykład liczba $\pi \approx 3.14$ i liczba $e \approx 2.71$ są przestępne.
Niżej na osi liczbowej zaznaczone są :

liczby naturalne	$0,\ 1,\ 2,\ 3,$
liczby calkowite	$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,$
liczby wymierne ulamki zwykle	$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},$
liczby algebraiczne	$-\sqrt{3},\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},$
liczby przestpne	$-\pi.\ \pi$

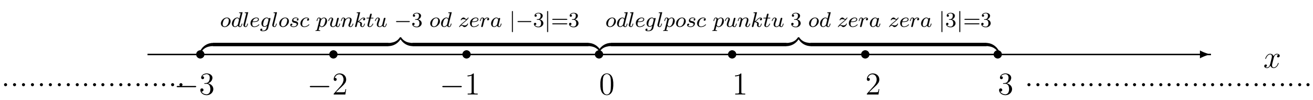


Liczby rzeczywiste. Liczbami rzczywistymi nazywamy wszystkie liczby naturalne, wszystkie liczby całkowite, wszystkie liczby wymierne, wszystkie liczby niewymiene, algebraiczne i przestępne. Zatem zbiòr liczb rzeczywisty, ktòry oznaczamy literą R jest najszerszym zbiorem w przestrzeni rzeczywistej R.

[1] Po zniesieniu nawiasów i uporządkowaniu współczynników otrzymamy wielomian stopnia n o współczynniku $a_n = 1$ i z pozostałymi współczynnikami $a_{n-1}, a_{n-2}, , ...a_a,\ a_1$ liczbami całkowitymi.

0.5 Wartość bezwzglęna

Wartość bezwzględna liczby to odległość punktu x od począdku układu oznaczonego przez 0. Zatem, wartość bezwzględna liczby x jest zawsze nieujemna. Niżej na osi liczbowej zaznacze są liczby całkowite i wartość bezwzględna $|-3| = 3 \quad i \quad |3| = 3$



Dokładnie, wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x określamy wzorem

Definicja 0.2

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$$

Na przykład niech $x = -5$

$$|-5| = \left\{ \begin{array}{rll} -5, & \text{gdy} & -5 \geq 0, \ false \\ -(-5) & \text{gdy} & -5 < 0, \ true \end{array} \right\} = 5$$

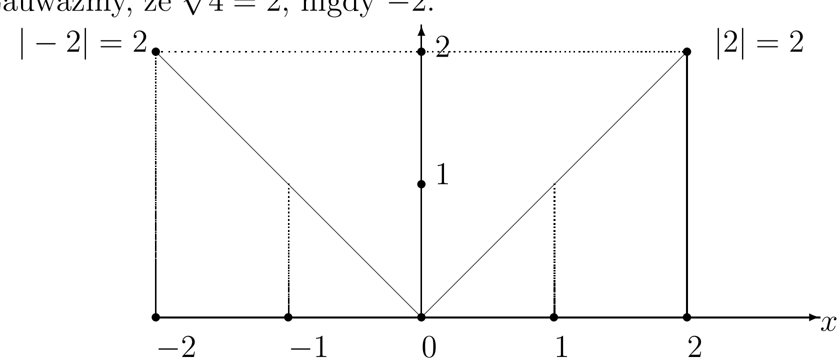
Podobnie niech $x = \frac{5}{3}$

$$|\frac{5}{3}| = \left\{ \begin{array}{rll} \frac{5}{3}, & \text{gdy} & \frac{5}{3} \geq 0, \ true \\ -(-\frac{5}{3}) & \text{gdy} & \frac{5}{3} < 0, \ false \end{array} \right\} = \frac{5}{3}$$

Wartość bezwzględną liczby x jest dana rȯwnież wzorem

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Zauważmy, że $\sqrt{4} = 2$, nigdy -2.



Wykres wartości bezwzlędnej $y = |x|$

Kończąc zauważmy, że "Język liczb" ma nieskończoną dużą ilość słów symbolicznie oznaczanych jako ciągi cyfr binarnych, oktalnych, decymalnych lub ciągi cyfr systemòw liczbowych o dowolnie wybranej podstawie $\rho > 1$, gdzie ρ jest liczbą naturalną.
Obecnie używane komputerowe technologie pozwalają zapisać i zapamiętać w "języku liczb" treść kasiążek z literatury, nauki, sztuki, w istocie z dowolnego obszaru wiedzy. To znaczy zapisać i zapamiętać tekst, wykresy , rysunki, obrazy, modele tròjwymiarowe i filmy.