

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS  
02-892 Warszawa  
ul. Bażancja 16

ZASTOSOWANIE ILOCZYNU WEKTOROWEGO  
DO OBLICZANIA POLA CZWOROKĄTA

Tadeusz STYŚ

Warszawa styczeń 2020

# Contents

|       |                                                          |   |
|-------|----------------------------------------------------------|---|
| 0.1   | Zastosowanie iloczynu wektorowego                        |   |
|       | do obliczania pola czworokąta dowolnego. . . . .         | 1 |
| 0.1.1 | Iloczyn wektorowy w przestrzeni trójwymiarowej $R^3$ . . | 1 |
| 0.1.2 | Pole czworokąta. Przykłady . . . . .                     | 2 |

## 0.1 Zastosowanie iloczynu wektorowego do obliczania pola czworokąta dowolnego.

Pole dowolnego czworokąta  $ABCD$  o danych wierzchołkach  $A, B, C, D$  we współrzędnych kartezjańskich możemy obliczyć stosując iloczyn wektorowy w przestrzeni kartezjańskiej  $R^3$  cf. (1)

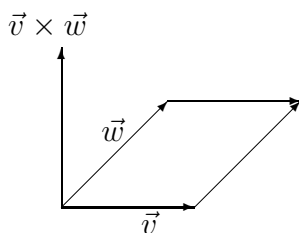
### 0.1.1 Iloczyn wektorowy w przestrzeni trójwymiarowej $R^3$

Naturalnie iloczyn wektorowy wykonalny jest w przestrzeni kartezjańskiej trójwymiarowej i opisany jest w rozdziale geometrii przestrzennej. W tym rozdziale, geometrii płaskiej, stosujemy iloczyn wektorowy do obliczania pola czworokąta dowolnego. Rozpatrzmy dwa wektory

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad i \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

w przestrzeni trójwymiarowej

$$R^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty\}$$



Wynikiem mnożenia wektorowego wektora  $\vec{v}$  przez wektor  $\vec{w}$  jest trzeci wektor  $\vec{v} \times \vec{w}$ , którego współrzędne obliczamy z rozwinięcia Laplace'a macierzy utworzonej ze współrzędnych wektorów

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Mianowicie iloczyn

$$\vec{v} \times \vec{w} = [Det \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}, -Det \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix}, Det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}]$$

gdzie wyznaczniki -determinants

$$Det \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix} = v_2 * w_3 - v_3 * w_2,$$

$$-Det \begin{Bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{Bmatrix} = -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1),$$

$$Det \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{Bmatrix} = v_1 * w_2 - v_2 * w_1$$

Skąd otrzymamy wzór na współrzędne iloczynu wektorowego

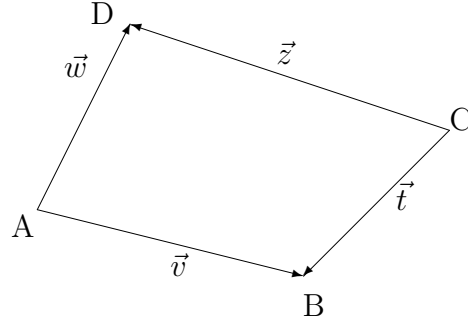
$$\vec{v} \times \vec{w} = [v_2 * w_3 - v_3 * w_2, -(v_1 * w_3 - v_3 * w_1), v_1 * w_2 - v_2 * w_1]. \quad (1)$$

Wektor  $\vec{v} \times \vec{w}$  jest prostopadły do wektorów  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$ , a jego o długość równa jest polu równoległoboku o bokach  $\vec{v}$  i  $\vec{w}$ . Zatem długość wektora

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{|v_2 * w_3 - v_3 * w_2|^2 + |-(v_1 * w_3 - v_3 * w_1)|^2 + |v_1 * w_2 - v_2 * w_1|^2}$$

### 0.1.2 Pole czworokąta. Przykłady

Rozpatrzmy czworokąt  $ABCD$



o wierzchołkach

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$

$$C = (c_1, c_2, c_3), \quad D = (d_1, d_2, d_3)$$

rozpięty na wektorach

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3] = \vec{AB}, \quad \vec{w} = [w_1, w_2, w_3] = \vec{AD},$$

$$\vec{z} = [z_1, z_2, z_3] = \vec{CD}, \quad \vec{t} = [t_1, t_2, t_3] = \vec{CB},$$

gdzie współrzędne wektorów  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$ ,  $\vec{z}$ ,  $\vec{t}$  określamy przez różnice współrzędnych wierzchołków  $A, B, C, D$  czworokąta  $ABCD$

$$v_1 = b_1 - a_1, \quad v_2 = b_2 - a_2, \quad v_3 = b_3 - a_3,$$

$$w_1 = d_1 - a_1, \quad w_2 = d_2 - a_2, \quad w_3 = d_3 - a_3,$$

$$z_1 = c_1 - d_1, \quad z_2 = c_2 - d_2, \quad z_3 = c_3 - d_3,$$

$$t_1 = c_1 - b_1, \quad t_2 = c_2 - b_2, \quad t_3 = c_3 - b_3.$$

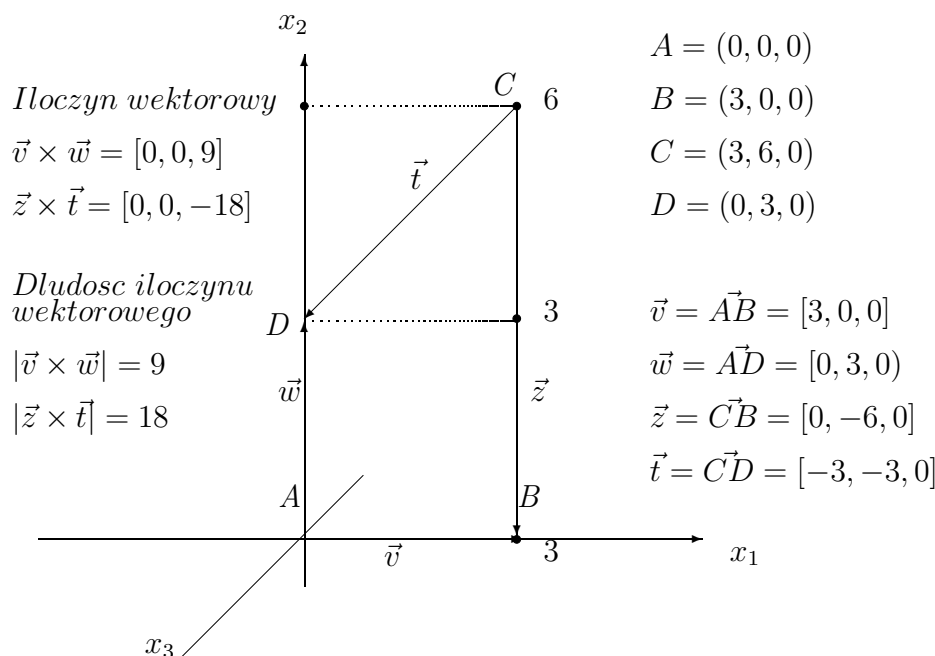
Stosując iloczyn wektorowy (cf. (1)) możemy obliczyć pole dowolnego czworokąta o danych współrzędnych jego wierzchołków. Mianowicie, pole czworokąta wypukłego  $ABCD$  równe jest połowie sumy iloczynu wektorowego wektorów <sup>1</sup>

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \vec{v} \times \vec{w} + \frac{1}{2} \vec{z} \times \vec{t} \quad (2)$$

**Przykład 0.1** Oblicz pole czworokąta  $ABCD$  rozpiętego na wektorach

$$\vec{v} = [3, 0, 0] = \vec{AB}, \quad \vec{w} = [0, 3, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{z} = [0, -6, 0] = \vec{CB}, \quad \vec{t} = [-3, -3, 0] = \vec{CD}$$



Obliczamy iloczyny wektorowe  $\vec{v} \times \vec{w}$  i  $\vec{z} \times \vec{t}$  stosując wzory (cf. (1))

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 3 * 0, -(3 * 0 - 0 * 0), 3 * 3 - 0 * 0] \\ &= [0, 0, 9] \end{aligned}$$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned} \vec{z} \times \vec{t} &= [-6 * 0 - 3 * 0, -(0 * 0 - 3 * 0), 0 * 3 - 6 * 3] \\ &= [0, 0, -18] \end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta  $ABCD$  jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  i  $\vec{z}$ ,  $\vec{t}$ .

<sup>1</sup>Pole czworokąta wklęsłego równe jest różnicy iloczynów wektorowych  $P_{ABCD} = \frac{1}{2} \vec{v} \times \vec{w} - \frac{1}{2} \vec{z} \times \vec{t}$

Mianowicie

$$\begin{aligned}
 P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{z} \times \vec{t}| \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9^2} + \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + (-18)^2} \\
 &= \frac{1}{2} * 9 + \frac{1}{2} * 18 \\
 &= 4.5 + 9 = 13.5
 \end{aligned}$$

2

Rozpatrzmy inny przykład obliczania pola czworokąta stosując iloczyn wektorowy.

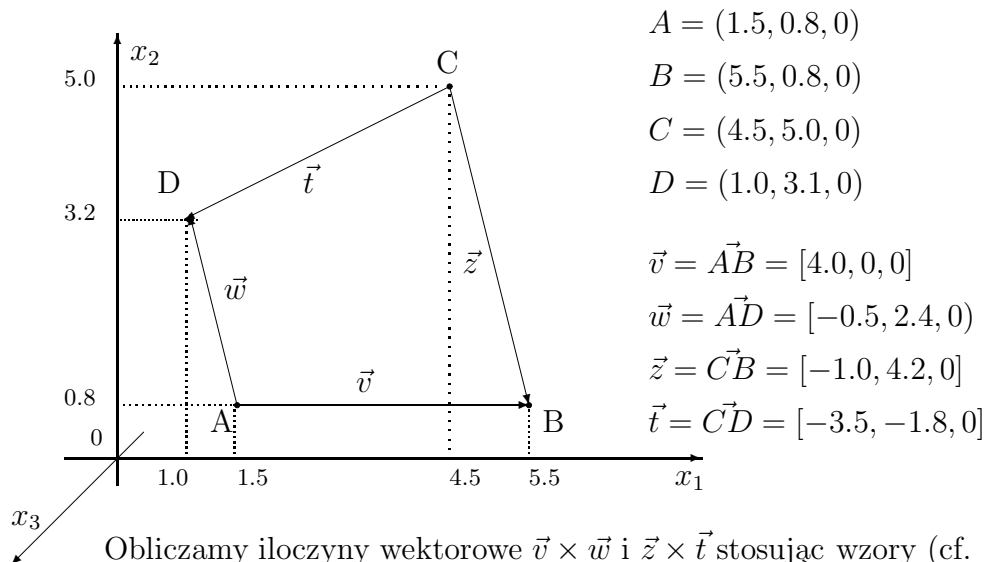
**Przykład 0.2** Oblicz pole czworokąta  $ABCD$  rozpiętego na wektorach

$$\vec{v} = [4.0, 0, 0] = \vec{AB},$$

$$\vec{w} = [-0.5, 2.4, 0] = \vec{AD},$$

$$\vec{z} = [-1.0, 4.2, 0] = \vec{CB},$$

$$\vec{t} = [-3.5, -1.8, 0] = \vec{CD}$$



$$\begin{aligned}
 \vec{v} \times \vec{w} &= [0 * 0 - 0 * 2.4, -(4 * 0 + 0.5 * 0), 4 * 2.4 + 0.5 * 0] \\
 &= [0, 0, 9.6]
 \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Długość wektora  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$  o współrzędnych  $v_1, v_2, v_3$  w przestrzeni kartezjańskiej  $R^3$  obliczmy ze wzoru  $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

i iloczyn wektorów

$$\begin{aligned}\vec{z} \times \vec{t} &= [4.2 * 0 + 1.8 * 0, -((-1) * 0 - (-3.5) * 0), 1 * 1.8 + 4.2 * 3.5] \\ &= [0, 0, 16.5]\end{aligned}$$

Obliczamy pole czworokąta  $ABCD$  jako sumę połowy iloczynu wektorowego wektorów  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  i  $\vec{z}$ ,  $\vec{t}$ .

Mianowicie

$$\begin{aligned}P_{ABCD} &= \frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}| + \frac{1}{2}|\vec{z} \times \vec{t}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 9.6^2} + \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 16.5^2} \\ &= \frac{1}{2} * 9.6 + \frac{1}{2} * 16.5 \\ &= 4.8 + 8.25 = 13.05\end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Długość wektora  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$  o współrzędnych  $v_1, v_2, v_3$  w przestrzeni kartezjańskiej  $R^3$  obliczmy ze wzoru  $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$